

*nou*biaix

Revista de la FEEMCAT i de la SCM • Desembre 2024



Consell de redacció:
Noemí Ruiz / Carlos Giménez (coords.)
Montserrat Alsina
Joan Carles Ferrer
Joan Miralles
Manuel Udina

© dels articles, els seus autors

Coediten:

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques (FEEMCAT)
Campus de Montilivi, edifici P-IV
17071 Girona
feemcat.org

Societat Catalana de Matemàtiques (SCM),
filial de l'Institut d'Estudis Catalans
Carme, 47
08001 Barcelona
scm.iec.cat

noubiaix@gmail.com



Periodicitat: semestral
Nombre d'exemplars: 1.700

Fotografia de la coberta:
Il·lusió de salt finit
Oriol Bote Vila
Vedruna Vall (Terrassa)

ISSN: 2014-2021
Dipòsit legal: B-22.314-2012
Impressió: Gráficas Rey

Edicions
de la Universitat de Barcelona
Adolf Florensa, s/n
08028 Barcelona
Tel.: 934 035 430
comercial.edicions@ub.edu
www.edicions.ub.edu



sumari

1 Editorial

articles

- 4 Del tot al no-res: divulgant el pensament
borrós a partir d'una exposició al Museu
de Matemàtiques
Queralt Viladevall
Àngel Alsina
Joan Carles Ferrer Comalat

- 19 Algemat: àlgebra amb materials
Anna Vilaró Utrillo

- 32 Connexió entre el 2D i el 3D...
amb GeoGebra!
Bernat Ancochea Millet
Guillem Bonet Carbó

- 41 Viatge interplanetari:
aprendre matemàtiques amb
l'univers com a escenari
Roser Matas Nadal
Xavier Sánchez Carrasco
Marc Faüchs Xifra

- 52 La pastisseria, la guerra de les
galàxies i les matemàtiques
Jordi Arnau i Ballestar

- 66 Les construccions geomètriques
euclidianes. La papiroflèxia i les
matemàtiques cartesianes
Josep Pla Carrera





Dels sis articles basats en experiències personals que recopilem en aquest número 51 del NouBiaix, n'hi ha tres que corresponen a docents de secundària que debuten en el món de les publicacions, i que presenten propostes que, prèviament, han treballat amb l'alumnat respectiu.

Volem agrair l'esforç que els ha comportat aquest repte i animem a tothom a compartir experiències que puguin ser inspiradores, i que proposin una reflexió rigorosa sobre les matemàtiques. També volem demanar disculpes als autors del primer article pel retard en la previsió inicial de publicació, degut a l'endarreriment que va afectar el número 50.

El primer article, «Del tot al no-res», de Queralt Viladevall, Àngel Alsina i Joan Carles Ferrer, mostra que alguns conceptes que cal introduir a edats primerenques són la base per desenvolupar nocions matemàtiques complexes en un futur no gaire llunyà: la clusterització, la idea de regressió logística, la lògica de «no A no implica el contrari», etc. L'exposició d'exemples es complementa amb una clara justificació matemàtica. Finalment, a més de l'agradable lectura que convida a la reflexió, cal posar en valor els magnífics dibuixos d'una de les autores per la força comunicativa que desprenen.

En el segon article, titulat «Algemat: àlgebra amb materials» i escrit per Anna Vilaró, creadora del material, lectors i lectores descobriran l'origen d'aquest projecte tan personal i les seves característiques principals (peces, tauler...). L'article planteja unes quantes idees, però heu de saber que si tafanegeu a la pàgina web www.annahelpme.com tindreu a disposició un món més extens. Esperem que el coneixement d'Algemat, un material amb autoria catalana, pugui ser una bona ajuda a l'hora de treballar les tècniques algebraïques que, ja en secundària, comporten un esforç d'abstracció que de vegades els estudiants troben difícil de fer.

El tercer article, titulat «Connexió entre el 2D i el 3D. . . amb GeoGebra!», ha estat escrit per Bernat Ancochea i Guillem Bonet, ben coneguts pels seguidors del programari de geometria dinàmica GeoGebra. A través de la seva experiència mostren una proposta que permet completar activitats que se solen desenvolupar a primària i secundària sobre la construcció 3D de figures amb cartolina. Ara bé, el mètode d'indagació que fa de fil conductor de l'article, la

manera com es van desenvolupant les preguntes, el fet de mirar les coses del dret i del revés, també pot inspirar els lectors en una metodologia per crear propostes pròpies. Finalment, com és característic de la comunitat GeoGebra, el codi és lliure i a l'abast de tothom.

El quart article, escrit per Roser Matas, Xavier Sánchez i Marc Faüchs, ens descriu amb tot detall el disseny i la implementació a l'aula d'una situació d'aprenentatge de l'àmbit STEAM amb els seus alumnes de primer d'ESO d'un centre d'alta complexitat. Aquesta activitat és plenament replicable: qualsevol equip de professors motivat la pot plantejar si vol promoure un ús significatiu de les matemàtiques en un entorn STEAM, potenciant la col·laboració tant de docents de diferents àmbits com dels alumnes mateixos, un objectiu que no sempre és fàcil assolir.

En el cinquè article, Jordi Arnau ens mostra com es pot abordar el tema de la modelització matemàtica amb tot el rigor necessari i partint d'objectes ben coneguts pels alumnes, com ara el «dònut» i la mítica Estrella de la mort de la saga de *La guerra de les galàxies*. Propostes com aquesta han de servir, sens dubte, per a què el treball de la modelització matemàtica, inclosa de manera explícita en el nou currículum de les matemàtiques de batxillerat, comenci a ser vista com un objectiu a l'abast de qualsevol docent i alhora com una font de motivació per als alumnes en plantejar-los reptes basats en l'anàlisi d'objectes que els són molt propers.

Finalment, l'últim article, titulat «Les construccions geomètriques euclidianes i la papiroflèxia: una fusió matemàtica», és un text captivador escrit per Josep Pla Carrera que explora la connexió entre les matemàtiques clàssiques i l'art de la papiroflèxia. L'autor ens introdueix a les «construccions geomètriques euclidianes» i les «matemàtiques cartesianes», i hi detalla les tècniques que es basen en el regle i el compàs, i com han establert el punt de partida per trobar la solució de molts dels problemes geomètrics clàssics.

El lector descobrirà que aquestes eines fonamentals, que es remunten a l'escola de Plató i els «Elements» d'Euclides, són, encara ara, bàsics en la resolució de problemes geomètrics actuals. A més, l'obra posa de manifest que la papiroflèxia, aparentment simple, amaga estructures matemàtiques sorprenents. Aquest text és una invitació a explorar la bellesa de la matemàtica i a fer-la accessible i interessant tant a experts com a persones que expressen curiositat en aquest sentit.

Voldríem que gaudíssiu de tots els articles i esperem que us facin aprendre, o potser reaprendre, aspectes relacionats amb aquest món de les matemàtiques, present arreu i tan extens.

articles
articles



articles

Del tot al no-res: divulgant el pensament borrós a partir d'una exposició al Museu de Matemàtiques

Queralt Viladevall

Estudiant del doctorat en Educació de la UdG
i professora de Multimèdia a la UOC
qviladevall@uoc.edu

Àngel Alsina

Formador de mestres i catedràtic de Didàctica
de les Matemàtiques a la Universitat de Girona
angel.alsina@udg.edu

Joan Carles Ferrer Comalat

Professor de Matemàtiques de la UdG i
màster en Didàctica de les Matemàtiques
joancarles.ferrer@udg.edu

Resum

Aquest article presenta els resultats de l'aprenentatge no formal generats en una exposició al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) al voltant dels principals quantificadors i el pensament borrós. S'infereix que les exposicions de contingut matemàtic fomenten aquest tipus d'aprenentatge matemàtic, i per tant, se'n desprèn la importància de poder comptar amb espais que promoguin activitats d'aquesta mena, com ara el Museu de Matemàtiques.

Abstract

This paper presents the non-formal learning generated by an exhibition at the Museum of Mathematics of Catalonia. The topic was the relationship between quantifiers and fuzzy thinking. It is inferred that exhibitions of mathematical content encourage this type of mathematical learning, and therefore that it is important to have places that promote this type of activity, such as the Museum of Mathematics.

1. Introducció

El poc, molt o res (o cap) són quantificadors que s'utilitzen per designar quantitats indefinides relacionades amb la numeració, els quals poden ser introduïts a l'escola des d'edats primerenques (Canals, 1992). Per aquest motiu, no se'ns ha de fer estrany trobar tasques a partir de recursos gràfics (fitxes clàssiques) com les de les figures 1, 2 i 3, que permeten treballar el significat d'aquests quantificadors a l'aula.



Figura 1. Tasca d'encerclar la solució.



Figura 2. Tasca d'introduir text en caselles.



Figura 3. Tasca d'unir amb fletxes.

Tanmateix, en els quaderns i llibres de text de matemàtiques d'infantil o primària difícilment es proposen tasques similars per treballar els *poc*, *bastant* o *gens* relacionats amb la idea de graduació d'una qualitat, tot i que Canals (1992) exposa que a partir dels cinc anys els menors tenen la capacitat ben desenvolupada d'ordenar elements d'un conjunt segons la parcialitat de la propietat que el defineix. Addicionalment, cal tenir present també que els currículums oficials actuals d'infantil i primària (MEFP, 2022a; MEFP, 2022b) dediquen escassa atenció a la graduació i es continuen centrant a desenvolupar el pensament segons la lògica binària i la teoria de conjunts clàssica. En un futur proper, gràcies en bona mesura a l'impuls del moviment social de sexe no binari (Wilchins, 2007; Wilchins *et al.*, 2020), aquesta tendència podria canviar, i ho podria fer seguint la proposta d'acceptar noves idees genèriques (Vendrell, 2009), de la mà de la teoria dels conjunts borrosos (Zadeh, 1965), que accepta que els elements d'un conjunt hi poden pertànyer parcialment.

Considerant aquests antecedents, la finalitat de l'article és presentar i analitzar una exposició temporal al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) que pretén divulgar els conjunts borrosos com un coneixement rellevant que de mica en mica s'ha d'anar introduint en el currículum de matemàtiques si es vol trencar la visió binària de la realitat. Així, en la primera part es fonamenten teòricament els conjunts borrosos; en la segona es presenten les obres de l'exposició temporal *Del tot al no-res*; i, finalment, en la tercera, s'exposen els resultats esperats i els no esperats a partir d'aquesta exposició.

2. Els conjunts borrosos

Formalment, els conjunts borrosos es representen matemàticament amb una expressió que identifica cada element de l'univers amb el grau de pertinença al conjunt.

$$\tilde{A} = \{(x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), (x_3, \mu_{\tilde{A}}(x_3)), \dots\}$$

Quan s'accepta la parcialitat de pertinença, els nombres $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ poden ser valors reals entre 0 i 1. El barret en $\tilde{A}$ identifica els valors $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ com a possibles nombres entre 0 i 1, tots dos inclosos.

En la figura 4 es representa visualment un conjunt borrós. A partir d'una selecció d'imatges del conjunt univers, els x_i del conjunt, es fixa per a cadascun d'aquests elements un grau de veritat del predicat «ser granota» i que representaria els nombres $\mu_{\tilde{A}}(x_i)$ definits anteriorment.

A més de l'estudi de com trobar un possible grau de veritat per a cada element, hi ha mol·tíssims altres temes d'estudi relacionats amb aquesta teoria, com per exemple les múltiples alternatives que se'ns presenten quan es tracta de definir el complementari, la unió i la intersecció de conjunts borrosos. Les més habituals solen ser les definides per Zadeh (1965):

$$\begin{aligned}\tilde{A}' &= \{(x_i, \mu_{\tilde{A}'}(x_i))\} \quad \text{amb} \quad \mu_{\tilde{A}'}(x_i) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x_i) \\ \tilde{A} \cup \tilde{B} &= \{(x_i, \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x_i))\} \quad \text{amb} \quad \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x_i) = \text{màxim}(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i)) \\ \tilde{A} \cap \tilde{B} &= \{(x_i, \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x_i))\} \quad \text{amb} \quad \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x_i) = \text{mínim}(\mu_{\tilde{A}}(x_i), \mu_{\tilde{B}}(x_i))\end{aligned}$$

				
1	0	0	0	0
				
0	0,5	0,25	0	0,75
			...	
0	0	0		

Figura 4. El conjunt borrós *Ser granota*.

Tenint en compte aquests antecedents, ja s'ha iniciat un debat en àmbits educatius sobre la introducció dels conjunts borrosos i la seva teoria associada en el currículum formal (Blanco *et al.*, 2016; Trillas i García-Honrado, 2019; Viladevall *et al.*, 2023a).

La nostra aportació en aquest debat, fruit de les investigacions en el marc d'una tesi doctoral en curs, és la d'introduir a les primeres etapes educatives el tema del grau de pertinença conjuntament amb els adverbis de quantitat, és a dir, els quantificadors. Aquesta idea permetria, per exemple, no haver de treballar amb nombres entre 0 i 1 o entre cap escala homomòrfica tipus 0 a 100. La proposta és coherent amb el fet que en la investigació amb teoria de conjunts borrosos és permès que en experiments de determinació de graus s'utilitzin termes lingüístics per establir els valors numèrics dels graus (Kaufmann i Aluja, 1988; Alsina, C. i Trillas, 1991).

Sobre aquesta possible transformació curricular, de moment el que ja es pot afirmar és que, a mesura que el nen creix, el seu raonament lògic traspasa el binarisme i comença a percebre que és el gris, i no el blanc o el negre, el que pot ser més ajustat quan es tracta de descriure moltes de les situacions que l'envolten. També sabem que, amb uns anys més, el menor arriba a tenir prou coneixements per aplicar de la manera correcta tot de termes de graduació qualitativa a multitud de situacions quotidianes. Aleshores, ens preguntem: de quina manera els nens adquireixen aquest aprenentatge?

Baroody (1987) explica que els infants comencen a construir aquest coneixement en un entorn informal, no escolar, a partir de les interaccions amb el medi físic i social, on es presenten escenaris com els jocs, els contes o les exposicions, els quals generen aprenentatges d'una manera natural i espontània. Autors com Alsina, À (2015), Alsina, À. *et al.* (2023), Geist (2014) o Clements i Sarama (2015), entre d'altres, han explicat aquests coneixements emergents de naturalesa intuïtiva i informal.

L'experiència que presentem mostra un cas particular d'aprenentatge no formal ofert en un context d'exposició al Museu de Matemàtiques de Catalunya.

3. L'exposició temporal *Del tot al no-res*

L'exposició temporal *Del tot al no-res* es va originar a partir de la proposta de la Unitat de Matemàtiques de la Universitat de Girona. Aquesta exposició va ser anunciada en el web de la Setmana de la Ciència 2021 i seguia la idea de popularitzar el pensament borrós, tal com s'havia fet en les exposicions *Fuzzy Art*, exhibida en el Museu de la Ciència CosmoCaixa (Viladevall, 2018) i *L'increïble enginy dels animals* (Viladevall, 2020), que ha estat exposada en diverses biblioteques públiques municipals.

Als jardins de la que actualment és la seu principal del MMACA (Imatge 1) es van mostrar deu obres de creació pròpia per part de la primera autora de l'article (Queralt Viladevall), les quals tenien per objectiu mostrar deu situacions quotidianes on es passava del tot al no-res.



Imatge 1. Obres de l'exposició.

El cartell de l'exposició que acompanyava les obres (figura 5) presentava una ampliació de l'obra *Glaçons*, feta amb la finalitat que el visitant pogués copsar que les obres es podien ampliar amb molts més elements intermedis.

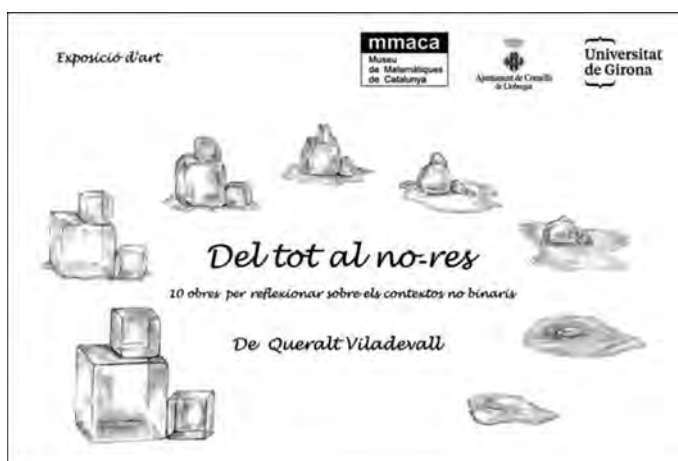


Figura 5. Cartell de l'exposició.

La inauguració de l'exposició es va acompanyar amb un taller de creació d'un zoòtrop. Més d'un centenar de persones hi van participar. En una tira de paper, calia dibuixar els diversos estadis d'un ull obrint-se i tancant-se, decorar l'exterior del zoòtrop i enganxar-ne les parts, que acabaven formant aquesta joguina òptica inventada per William George Horner (imatge 2).



Imatge 2. El taller.

La tira del zoòtrop (figura 6) era un primer exemple que permetia reflexionar sobre el concepte de graduació, ja que contenia una seqüència d'un ull obrint-se i tancant-se, i permetia també treballar com expressar amb paraules l'evolució del procés: ull no obert, ull una mica obert, ull més obert que l'anterior, ull gairebé obert del tot o ull completament obert.

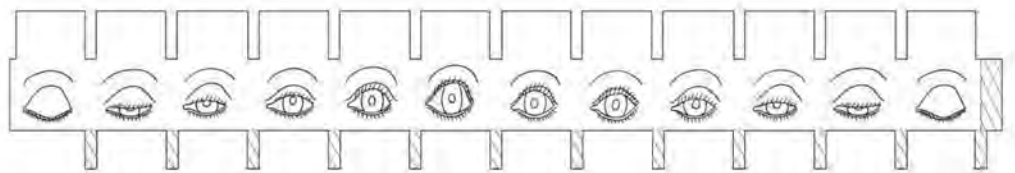


Figura 6. Seqüència d'un ull obrint-se i tancant-se.

En l'àmbit científic, cadascuna de les obres tenia relació amb el pensament borrós, el qual permet deixar de pensar en termes de veritat o falsedat absolutes i classificar les situacions en una escala qualitativa de graus entre les dues possibilitats.

En la vida real trobem multitud de situacions que són molt difícils o impossibles de classificar en un conjunt, com per exemple distribuir un conjunt de fruites en grups de madures o no madures; classificar tots els moments de la posta de sol en dia o nit; o, fins i tot, classificar els instants d'existència d'un ésser considerant-lo viu o mort.

I és que, en uns contextos determinats, es pot acceptar que les coses poden ser al mateix temps en un cert grau i no ser en un altre grau. L'exposició pretenia ser un petit recull d'aquestes situacions amb l'objectiu subjacent de fer reflexionar el visitant sobre els problemes que ocasiona voler-ho classificar tot binàriament.

A continuació, es presenten detalladament cadascuna de les deu situacions i les obres actuals dissenyades específicament per il·lustrar-les. Amb elles, és fàcil introduir en un públic adult les idees presents als supòsits de la teoria de conjunts borrosos, com ara la no existència de la paradoxa sorites (situacions 3.3. i 3.4) o la subjectivitat de la determinació dels valors del grau de pertinença al conjunt.

Prèviament, cal dir que avui dia i en alguns àmbits es considera que una exposició, més que explicar, ha de despertar preguntes en el visitant (Wagensberg, 2000). Aquesta idea és la que ens va guiar a presentar al visitant les dues primeres obres abans d'entrar en explicacions de caràcter matemàtic.

Esperàvem que el visitant, amb aquestes dos primers exemples de situacions reals molt conegudes per a tothom, hi tornés tard o d'hora per preguntar-se quina relació tenien amb la resta de l'exposició.

3.1. Primera situació. Capgròs



Figura 7. Obra *Capgròs*, de Queralt Viladevall.

En la figura 7 es poden observar diferents estats de la metamorfosi de capgròs a granota: les cinc situacions presents, d'esquerra a dreta, es poden etiquetar com a capgròs, capgròs amb dues potes, capgròs amb cos de granota o granota amb cua llarga, granota amb cua curta i granota.

3.2. Segona situació. Glaçons



Figura 8. Obra *Glaçons*, de Queralt Viladevall.

L'obra *Glaçons* (figura 8) mostra el desglaç d'uns cubs de gel perfectes. Ja en la segona imatge, s'observa que les cares i les arestes han perdut una mica la forma, i a mesura que l'aigua dels glaçons passa de sòlida a líquida la deformació va a més i més.

El pas de sòlid a líquid és una segona situació icònica coneguda per grans i petits des de sempre. No hi solem reflexionar, però en les situacions intermèdies hi ha una part sòlida i una part líquida a la vegada. Per tant, tenim un segon bon exemple de context real en el qual és acceptable afirmar amb pensament borrós que les coses poden ser i no ser en un cert grau.

3.3. Tercera situació. Del munt al no munt



Figura 9. Obra *Del munt al no munt*, de Queralt Viladevall.

Aquesta obra tenia per objectiu presentar formalment el que es coneix com a paradoxa sorites o paradoxa del munt.

La pregunta que aquesta paradoxa planteja és la següent: en quin moment un munt de sorra deixa de ser un munt quan en traiem granets? (figura 9) Si tenim un munt de sorra i en traiem un granet, seguirem tenint un munt. Això sembla inqüestionable. Per tant, un munt de sorra menys un granet és també un munt de sorra. El problema sorgeix en pensar que això és contradictori amb el fet que si anem traient un granet darrere l'altre tard o d'hora ens quedarem amb només un o dos granets, i ningú consideraria que un o dos granets formen un munt de sorra.

En pensament binari, on les situacions només es poden classificar com a veritat o mentida, s'espera que si es passa de veritat a mentida de manera seguida, en algun moment s'ha de passar de mentida a veritat. Aleshores, té sentit intentar trobar la resposta a quin és el moment exacte en què es deixa de tenir un munt.

3.4. Quarta situació. De la poma a la no poma

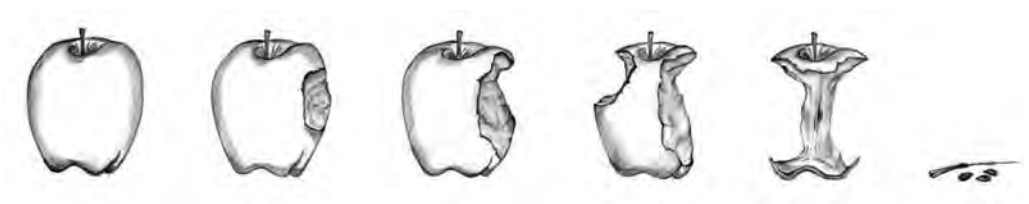


Figura 10. Obra *De la poma a la no poma*, de Queralt Viladevall.

La paradoxa sorites apareix en moltes situacions on hi ha una disminució gradual d'un objecte. Per exemple, si ens anem menjant una poma a poc a poc, en quin moment deixem de poder considerar que és una poma?

El matemàtic Bart Kosko va ser el primer a comentar, en el seu llibre *Pensament borrós* (Kosko, 1995), que en aquest pensament, el qual accepta que el grau de pertinença d'un objecte a un conjunt pot ser un valor entre el 0 % i el 100 %, no es produeix aquesta paradoxa atès que simplement s'accepta que a cada mossegada tenim menys poma, però que sempre es pot veure com a poma en un grau o en un altre.

L'obra de la figura 10 correspon a una visualització d'aquesta idea: en la primera imatge tenim poma al 100 %; en la segona, aproximadament al 95 %; en la tercera, al 60 %; en la quarta, al 35 %; en la penúltima, al 8 %; en la darrera a l'1 %; i si ens mengéssim també les llavors i la cua tindríem poma al 0 %. Kosko dedueix que en acceptar el grau de pertinença entre un 100 % fins a un 0 % sempre podem dir que tenim poma, encara que sigui en molt poc grau o en un grau igual a zero. Aleshores, si sempre tenim poma, no té sentit que ens preguntem quan deixem de tenir-ne.

3.5. Cinquena situació. Alegria



Figura 11. Obra *Alegria*, de Queralt Viladevall.

L'obra de la figura 11 pretén mostrar que hi ha multitud de situacions que es poden graduar entre el 100 % i el 0 %; en aquest cas, hem triat l'alegria. A més, pretenia obrir la reflexió que no estar alegre no implica haver d'estar enfadat.

El problema de confondre la negació de les afirmacions amb les afirmacions contradictòries (Linares *et al.*, 2018) produeix errors, com per exemple a l'hora de construir correctament les escales de Likert, que són unes escales de qualificació per graduar el grau d'acord o desacord amb algun tema o alguna característica (Viladevall *et al.*, 2023b).

Cal tenir present que, a través dels gestos de la cara i del cos, transmetem una gran quantitat d'informació que mostra les emocions que sentim. De fet, en l'ésser humà podem identificar set emocions bàsiques que es transmeten a través de l'expressió facial: l'alegria, la tristesa, la por, l'enuig, el fàstic, el menyspreu i la sorpresa, sentiments molt subjectius i personals.

El riure és la manifestació externa humana de l'emoció d'alegria. Es compon bàsicament d'una expressió facial acompanyada d'un so discontinu. Si no hi ha so, es parla de somriure. La seva expressió màxima es coneix com a gran riallada.

Somriure, riure o gran riallada expressen, doncs, diferents graus d'intensitat del mateix estat emocional. El somriure suposa el grau més lleu, és d'àmbit més local, i sol manifestar més sovint emocions de satisfacció i bons desitjos. El riure, a diferència del somriure, té volum sonor, és públic i notori, i pot implicar tot el cos. De fet, en català i en molts altres idiomes, la

paraula somriure ve de son- i riure, on son- és un prefix que prové de la forma llatina *sub-*, que significa «per sota», i que mostra la graduació de l'emoció.

3.6. Sisena situació. Plenitud



Figura 12. Obra *Plenitud*, de Queralt Viladevall.

L'obra que es mostra en la figura 12, a banda que segueix presentant exemples quotidians on es passa del tot al res gradualment, pretenia plantejar el que s'anomena vaguetat de les paraules i que, a causa d'aquesta vaguetat, pot esdevenir complicat decidir en quin moment assignem el 100 % o el 0 % a una situació i, per tant, cal admetre una certa arbitrarietat en aquesta assignació.

Quan demanem que ens omplin un got d'aigua, normalment no esperem que ens l'omplin com a la primera de les imatges. De fet, ja considerem el got ple en una situació com la que mostra la segona imatge.

De la mateixa manera, en la penúltima o darrera imatge es podria considerar que el got és buit, malgrat que encara hi quedi un cul d'aigua.

3.7. Setena situació. Vellesa



Figura 13. Obra *Vellesa*, de Queralt Viladevall.

En aquesta obra (figura 13), amb una possible graduació del 100 % al 0 %, es reflexiona també sobre l'ús de les paraules.

Quan diem que una persona és vella, no tenim una edat exacta al cap, però no hi ha dubte que una persona d'aspecte com la de la primera imatge es pot considerar vella. Si estem a prop dels 50 considerarem que la segona de les imatges representa una persona propera a la vellesa però que encara conserva joventut. Ara bé, des del punt de vista d'una persona jove de 15 anys, tots els que passen de 40 o 50 ja són vells.

Així, aquesta obra mostra que persones diferents poden tenir percentatges d'acceptació diferents i, per tant, presenta la idea que l'assignació de la graduació pot ser una assignació subjectiva relacionada amb el món real que ens envolta.

3.8. Vuitena situació. Vent fort

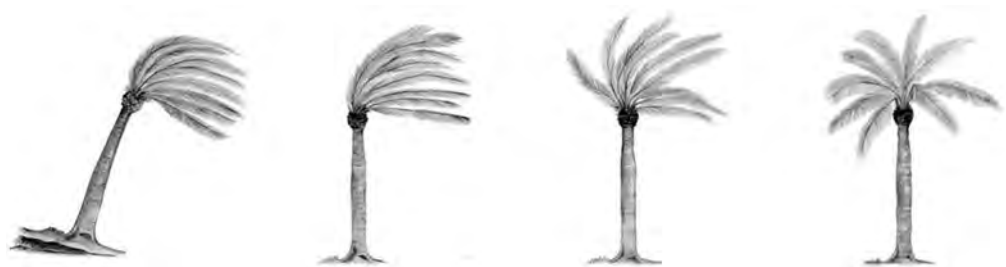


Figura 14. Obra *Vent Fort*, de Queralt Viladevall.

L'obra que es mostra en la figura 14 serveix per introduir la classificació de situacions segons l'expressió «fa un vent fort». Científicament, segons l'escala de la força del vent, es considera vent fort el que bufa a més de 39 km/h, velocitat en la qual ja tenim problemes per mantenir un paraigua obert.

Ara imaginem que el vent bufa a 38,999999 km/hora. Qualsevol persona diria que el vent és fort, però la classificació en pensament binari diria que no, que la situació s'ha de classificar dient que no fa un vent fort encara que sigui incapaç de diferenciar, amb els sentits, aquesta situació de la de 39 km/h.

L'establiment de valors exactes de classificació provoca sovint situacions absurdes com aquesta.

3.9. Novena situació. Nivell de duresa



Figura 15. Obra *Nivell de duresa*, de Queralt Viladevall.

L'obra està inspirada en un dels contes amb què els infants aprenen pensament no bivalent: *La Rinxols d'Or*. Aquesta narració conté una gran quantitat d'exemples del fet que no totes les característiques del món real es poden classificar en un es té o no es té (Viladevall *et al.*, 2023a). Així, la Rinxols d'or troba un plat de sopa massa calenta, un plat de sopa gens calenta i un plat de sopa en el seu punt ideal; una cadira massa tova, una de massa dura i una amb el seient d'una duresa justa (figura 15); un llit molt alt, un llit poc alt i un llit a l'alçada que considera ideal...

El conte ens porta a la reflexió de com, de manera informal, és a dir, fora de l'escola, a poc a poc anem aprenent que la vida té molts tons de gris i que les coses no són sempre blanques o negres.

3.10. Desena situació. Forma circular

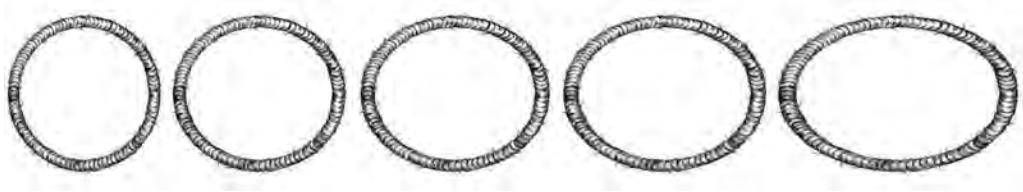


Figura 16. Obra *Forma circular*, de Queralt Viladevall.

Aquesta obra (figura 16) tancava l'exposició i estava inspirada en els treballs de Natalia R. Shenger-Krestovnikova, una estudiant de doctorat d'Ivan Pàvlov que va descobrir un fet sorprenent relacionat amb la classificació binària.

Ivan Pàvlov va ser professor de Fisiologia en l'Acadèmia Mèdica Imperial i director del Departament de Fisiologia de l'Institut de Medicina Experimental de Sant Petersburg, i va formular el que es va anomenar «condicionament clàssic», que es basa en l'estudi sobre com és possible provocar unes respostes determinades a partir d'uns estímuls prèviament neutres. A tall d'exemple, és molt conegut l'experiment consistent a fer sonar un metrònom (popularment es creu que es va utilitzar una campana) just abans de donar aliment a un gos. Es va arribar a observar que, quan el gos tenia gana, començava a salivar en el mateix instant que sentia el so del metrònom.

L'alumna de Pàvlov, Shenger-Krestovnikova, també treballava amb cans, condicionant-los amb cercles i el·lipses. Quan el gos veia un cercle sabia que li donarien menjar, però si la figura es corresponia amb una el·lipse, l'animal no rebia aliment. D'acord amb els processos normals de discriminació, el gos va aprendre a salivar quan veia el cercle i a no salivar quan veia l'el·lipse.

Després d'aquest condicionament, Shenger-Krestovnikova va seguir l'experiment presentant a l'animal el·lipses bastant circulars, de manera que era difícil determinar quan hi hauria menjar i quan no. En un d'aquests experiments, en el moment que l'el·lipse va adoptar una forma molt circular, alguns dels gossos van mostrar sobtadament un comportament força estrany: udolaven, gemegaven, presentaven conductes destructives... La situació d'extrema incertesa va ser massa estressant en algun cas. Pàvlov va anomenar aquest fenomen «neurosi experimental» i va plantejar la hipòtesi que les neurosis humanes es podrien desenvolupar d'una manera semblant. El dubte patològic d'un subjecte sobre l'estat de neteja de les seves mans és un típic exemple de neurosi humana (Laín, 1984). El pensament borrós pot ajudar a evitar l'aparició d'aquestes neurosis (Linares *et al.*, 2020) i, per tant, es pot justificar la inclusió del seu estudi en el currículum.

4. Resultats esperats, no esperats i conclusions

Amb l'exposició s'esperava oferir la possibilitat de comprendre diversos punts de la teoria de conjunts borrosos (Zadeh, 1965).

En primer lloc, s'esperava que el visitant adult pogués arribar a comprendre que la teoria de conjunts borrosos accepta que els elements d'un conjunt poden pertànyer en un grau

determinat al conjunt segons si es compleix parcialment el predicat que determina el conjunt per comprensió. És a dir, s'esperava que el visitant compregués que l'oració ««S» és «P»» es pot complir en un grau de veritat entre 1 (el subjecte «S» compleix sense cap dubte la propietat «P») i 0 (si el subjecte «S» no compleix per res la propietat «P»).

En segon lloc, s'esperava que el visitant adult pogués comprendre que la teoria de conjunts borrosos permet modelar de manera continuada transformacions de l'entorn. L'obra de la metamorfosi de capgròs a granota o la del desglaç d'uns cubs de gel amb la seva ampliació al cartell d'inici de l'exposició tenien aquesta intenció.

En tercer lloc, s'esperava que el visitant adult es pogués adonar que en la teoria de conjunts borrosos no hi ha cap necessitat d'haver de decidir en un cas dubtós entre dos conjunts complementaris. Això ho esperàvem aconseguir amb la del munt de sorra mostrant que no tenim problemes a trobar un element que estigui al mig. El que tingui assignat un valor 0,5 compleix aquesta condició.

En quart lloc, s'esperava que el visitant adult pogués comprendre que un element pot pertànyer a dos conjunts oposats sense problemes, al contrari del que passa en la teoria de conjunts clàssica. En el cas d'una el·lipse molt propera a un cercle, podem pensar que és un cercle amb grau molt proper a 1 i a la vegada no ho és i, per tant, pot ser també el·lipse.

I, en darrer lloc, s'esperava que el visitant adult pogués veure que en la teoria de conjunts borrosos sempre hi ha lloc per a la subjectivitat personal. Des de la perspectiva d'un infant, una persona d'1,70 m d'alçada pot ser alta, però un jugador de bàsquet d'1,95 m la pot considerar baixa. L'obra *Vellesa* tenia aquest propòsit.

Les preguntes i les reflexions al voltant de les obres que ens anaven arribant del públic adult assistent ens van confirmar que l'objectiu esperat de la part d'aprenentatge no formal podia ser assolit.

Com a millora per a futures exposicions, comentar que en lloc d'afegir text explicatiu a sota de les obres es va posar un codi QR que adreçava a un àudio. Pensem que hauria estat molt més eficient incloure també un text a sota de cada obra, ja que no tothom tenia ganes o possibilitats d'escoltar els àudios. Un text amb diverses mides de lletra, la més gran com a explicació molt per sobre per despertar curiositat i una de més petita amb l'explicació detallada seria el que va faltar per millorar l'experiència dels visitants al voltant de la part d'aprenentatge esperat.

Amb l'exposició, el que no s'havia previst era veure explícitament desenes de casos de transmissió matemàtica no formal relacionats amb paraules que expressen graduació d'una qualitat. Sincerament, no ens havíem imaginat que les obres portarien a desenes i desenes de pares a explicar les diferents parts als seus fills amb quantificadors com «poc», «una mica», «molt», «bastant»... La gran quantitat de casos observats ens va fer adonar que, a partir dels pares, l'aprenentatge no formal dels adverbis de quantitat per designar graduacions de propietats és actualment una font principal d'aprenentatge.

Cal comentar que, en aquest sentit, potser va ser un encert no afegir els textos que dèiem, ja que els pares es van sentir completament lliures per explicar el que volien als seus fills. Potser

les explicacions haurien generat un altre debat al voltant de l'aprenentatge esperat i no ens hauríem adonat mai d'aquest segon aprenentatge no formal.

Les conclusions que es poden extreure d'aquesta experiència és que les exposicions de contingut matemàtic poden fomentar l'aprenentatge no formal matemàtic molt més enllà del que ens pensem. Com que l'aprenentatge no formal matemàtic és essencial per dominar les matemàtiques formals que s'aprenen a l'escola (Alsina, 2015), podem inferir que un Museu de Matemàtiques és un regal per a tots els nens que hi poden anar.

En aquest sentit, és un privilegi tenir a Catalunya un Museu de les Matemàtiques, i encoratgem a seguir treballant per tal que les seves exposicions i activitats arribin a tantes persones com sigui possible.

Referències

- [1] Alsina, À. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea.
- [2] Alsina, À., Borràs, L., Doblado, R. i Grauvilardell, L. (2023). «Evaluación de las matemáticas emergentes de 0 a 3 años». *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 12(1), 53-80.
- [3] Alsina, C. i Trillas, E. (1991). «Fuzzy sets and mathematics education». *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 16-19.
- [4] Baroody, A. J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- [5] Blanco-Fernández, Á., Díaz-Díaz, P., García-Honrado, I., Ramos-Guajardo, A. B. i Rodríguez-Muñiz, L. J. (2016). «A proposal for assessing imprecise concepts in Spanish primary and secondary schools». *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 24, 71-91.
- [6] Canals, M. A. (1992). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola: 1. Parvulari*. Eumo.
- [7] Clements, H. D. i Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.
- [8] Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.
- [9] Kaufmann, A. i Gil-Aluja, J. (1988). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Milla-doiro.
- [10] Kosko, B. (1995). *Pensamiento borroso: La nueva ciencia de la lógica borrosa*. Crítica.
- [11] Laín Entralgo, P. (1984). *Antropología médica para clínicos*. Salvat.
- [12] Linares-Mustarós, S., Viladevall, Q., Llacay-Pintat, T. i Ferrer-Comalat, J. C. (2018). «Una introducción a las ideas fundamentales de la lógica borrosa a través del arte». *Cuadernos del CIMBAGE*, 1(20), 133-156.
- [13] Linares-Mustarós, S., Viladevall, Q. i Ferrer-Comalat, J. C. (2020). «La clasificación en la teoría de conjuntos borrosos». A Edunovatic (ed.), *Conference Proceedings: 5th Virtual International Conference on Education, Innovation and ICT* (p. 653-654). REDINE (Red de Investigación e Innovación Educativa).
- [14] Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022a). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. BOE.

- [15] Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP] (2022b). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE.
- [16] Trillas, E. i García-Honrado, I. (2019). «La transversalidad de la 'lógica' borrosa, ¿una oportunidad pedagógica?». *Cuadernos del CIMBAGE*, 2(21), 201-217.
- [17] Vendrell Ferré, J. (2009). «¿Corregir el cuerpo o cambiar el sistema? La transexualidad ante el orden de género». *Sociológica (México)*, 24(69), 61-78.
- [18] Viladevall, Q., Linares-Mustarós i S. Ferrer-Comalat, J. C. (2015). «Fuzzy Sets». A J. C. Ferrer-Comalat, S. Linares-Mustarós i Corominas Coll, D. (eds.), *New Techniques for Decision Making under Uncertainty*. Servei de publicacions de la Universitat de Girona.
- [19] Viladevall, Q., Linares-Mustarós, S. i Ferrer-Comalat, J. C. (2020). *L'increïble enginy dels animals. Catàleg de la mostra expositiva*. Servei de Publicacions de la Universitat de Girona.
- [20] Viladevall, Q., Ferrer-Comalat, J. C. i Alsina, Á. (2023a). «El cuento infantil como herramienta para introducir los conjuntos borrosos en las primeras edades». *Revista Infancia, Educación y Aprendizaje*, 9(1), 53-68.
- [21] Viladevall, Q., Linares-Mustarós, S., Huertas, M. A. i Ferrer-Comalat, J. C. (2023b). «Understanding the Axioms and Assumptions of Logical Mathematical Systems through Raster Images: Application to the Construction of a Likert Scale». *Axioms*, 12(12), 1064.
- [22] Wagensberg, J. (2000). «Principios fundamentales de la museología científica moderna». *Alambique*, 26, 15-19.
- [23] Wilchins, R. (2007). *Burn the Binary!* Riverdale Avenue Books LLC.
- [24] Wilchins, R., Nestle, J., Howell, C., Rivera, S., Wright, S. i Reiss, G. (2020). *GenderQueer-Voices from Beyond the Sexual Binary*. Riverdale Avenue Books LLC.
- [25] Zadeh, L. A. (1965). «Fuzzy sets». *Information and control*, 8(3), 338-353.

.....

Algemat: àlgebra amb materials

Anna Vilaró Utrillo

Professora de matemàtiques de secundària
anna@annahelpme.com

Resum

Sovint, trobar un bon material manipulatiu de matemàtiques que sigui estructurat és difícil. I encara és més complicat treballar continguts corresponents a l'ESO.

En aquest article s'explica l'experiència d'una professora que, com a resultat de la seva investigació i pràctica a l'aula, ha dissenyat un nou material manipulatiu.

S'aporten reflexions sobre diferents materials per treballar l'àlgebra i la seva idoneïtat per complir els objectius establerts. I més tard, s'exposa el material d'autocreació: ALGEMAT (Àlgebra amb material) explicant amb exemples com permet treballar diferents operacions matemàtiques.

Abstract

Finding good mathematics manipulative material that is structured is often difficult. And even more so if you want to work on content for compulsory secondary education. This article explains the experience of a teacher who, as a result of her research and practice in the classroom, has designed new manipulative material. Reflections are provided on different materials for working on algebra and their suitability to achieve the established objectives. Later, the self-creation material is presented: ALGEMAT (algebra with material), explaining with examples how it can be used to learn different mathematical operations.

Abans de començar a explicar què és l'Algemat, és important saber com va sorgir. Som-hi!

1. Introducció

Em dic Anna Vilaró Utrillo, fa més de 20 anys que soc professora de matemàtiques a secundària i sempre he tingut interès a poder treballar amb materials manipulatius.



Anna Vilaró Utrillo.

Com ja sabeu, els materials manipulatius són un recurs que ens ajuda a fer el pas del que és concret al que és abstracte i a l'assoliment de les competències, com també facilita l'atenció a la diversitat... Aquesta idea es va començar a gestar fa temps, per exemple en aquest text de Thomas R. Post (1981):

El uso de los manipulativos, un tipo particular de recursos, se presenta en el marco de las investigaciones realizadas desde las primeras décadas del siglo XX en relación con la formación y evolución de conceptos en los niños (Piaget, 1971; Dewey, 1938; Bruner, 1960; Dienes, 1969). Estas investigaciones sugieren que en algunos momentos los conceptos de los niños evolucionan a través de la interacción directa con el ambiente y que precisamente los manipulativos son vehículos que permiten que esto suceda. La importancia de este tipo de estudios se asocia al reconocimiento de la posibilidad de que se proporcione un conjunto de evidencia «persuasiva» para los docentes de matemáticas en relación con el uso de materiales manipulativos en la clase de matemáticas.

Més recentment, Goñi *et al.* (2011) fan referència al fet que en l'actualitat la majoria d'informació ens arriba en dues dimensions a través de diaris, revistes, fotografies, ordinadors, tauletes..., i per això mateix és imprescindible tenir recursos per fer el trajecte fins a la tercera dimensió. És en aquest camí on la manipulació d'objectes adquireix una importància cabdal: no és el mateix veure representacions que tocar-les.

L'àlgebra requereix un nivell d'abstracció elevat, i en aquest sentit vaig estar buscant un material que ajudés el meu alumnat a passar de la concreció a l'abstracció d'una manera natural. Que ells mateixos poguessin treure conclusions a través de l'observació del que havien manipulats.

L'objectiu era treballar l'àlgebra fent connexions amb la geometria, nombres enters, aritmètica, etc., a través d'un context geomètric en l'espai. I pel que fa a continguts d'àlgebra, poder treballar sumes, restes, multiplicacions i divisions amb polinomis, factoritzacions, equacions de $1r$, $2n$ i $3r$ grau, etc.

Aquest plantejament és coherent amb la visió d'alguns autors que indiquen que «passar de l'aritmètica a l'àlgebra saltant-se la geometria es pot considerar un error didàctic i històric,

que té explicació en el context del segle XVII quan la força del nou llenguatge simbòlic va desplaçar el raonament geomètric visual» (Katz i Barton, 2007).

2. Exploració de propostes per treballar l'àlgebra

Vaig començar utilitzant Algebra Tiles. Es tracta d'unes peces rectangulars i quadrades que es poden fabricar a l'aula amb goma eva i permeten fer operacions amb polinomis fins a grau 2. Podem dir que posa en joc aspectes de la geometria 2D, ja que tenen en compte l'amplada i l'alçada.

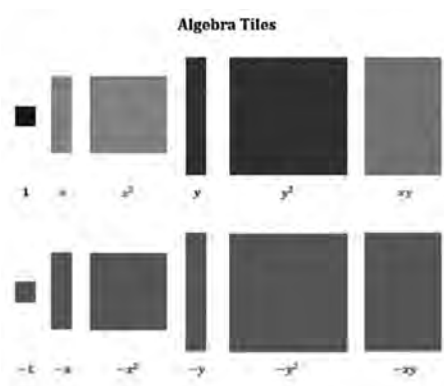


Figura 1. Algebra Tiles. La segona fila correspon a la part del darrere de les peces i ens indiquen els negatius.
(Font: <https://www.smartick.es/blog/matematicas/algebra/>)

A sota de cada peça, hi consta la part negativa i, per tant, no necessita cap tauler per indicar-ho. No obstant, requereix que l'alumnat tingui un coneixement profund dels nombres enters. Pressuposa que l'alumnat domina la regla dels signes.

I com ja s'ha comentat, només treballa fins a monomis de grau 2.

Continuant amb la recerca, vaig descobrir l'Algeblocks i l'Algebra Lab Gear. Dos materials utilitzats majoritàriament a gran part d'Amèrica i Austràlia i que eren molt poc coneguts a Europa. Aquests materials estan formats per uns prismes que permeten treballar amb mo-



Figura 2. Peces d'Algeblocks. (Font: Da Silva, 2018, p. 88.)

nomis de grau 3 pel fet que tenen en compte l'alçada, l'amplada i la fondària. Podem dir que permeten abordar aspectes geomètrics de 3D.

Pel que fa a l'Algeblocks, les peces necessiten un tauler per tal d'identificar si són positives o negatives. I també necessita dos taulers més: un per a les equacions i un altre amb eixos.

Cal dir que quan em vaig disposar a adquirir l'Algeblocks, em va ser impossible comprar-lo a causa del preu, que era molt elevat.

Al seu torn, l'Algebra Lab Gear consta d'unes peces similars a l'Algeblocks, però no utilitza taulers. Col·loca les peces en un escaire de plàstic i per identificar les negatives les situa a sobre de les positives.

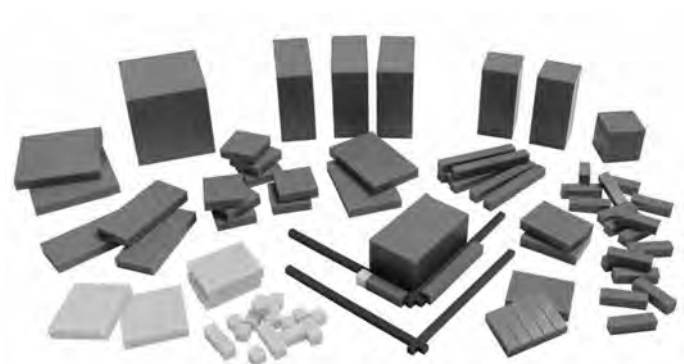


Figura 3. Peces de l'Algebra Lab Gear (Font: Didadx Inc.).

Aquest el vaig poder adquirir, però quan el vaig tenir a les mans el disseny em va desil·lusionar. És de plàstic i les peces són molt petites, no diferencia les variables per colors i el treball amb els nombres negatius no és gaire intuïtiu. En aquest sentit, semblava més funcional l'Algeblocks, però també és poc pràctic haver de treballar amb tres taulers diferents.

Tot i que no he arribat a fer servir cap dels dos materials esmentats, han sigut imprescindibles per conèixer i entendre la potencialitat d'aquesta mena de recursos. També hi ha nombrosos estudis que els avaluen en l'aula i això em donava una certa seguretat pel que fa als bons resultats que poden assolir (Blanco i Solares, 2017; Da Silva *et al.*, 2017, etc.).

Aquesta experiència amb materials previs va ser crucial per decidir i dissenyar el meu material fent-hi les adaptacions que em van semblar adequades. Va ser el moment d'anar-me'n al fuster (això va ser al 2020) i fer-li el primer encàrrec del que volia que fos l'Algemat.

3. ALGEMAT

L'Algemat consta d'una caixa de fusta amb dos taulers amb uns eixos, deu tipus de prismes diferents i dues peces amb el símbol igual, i està preparat perquè hi puguin treballar quatre alumnes.

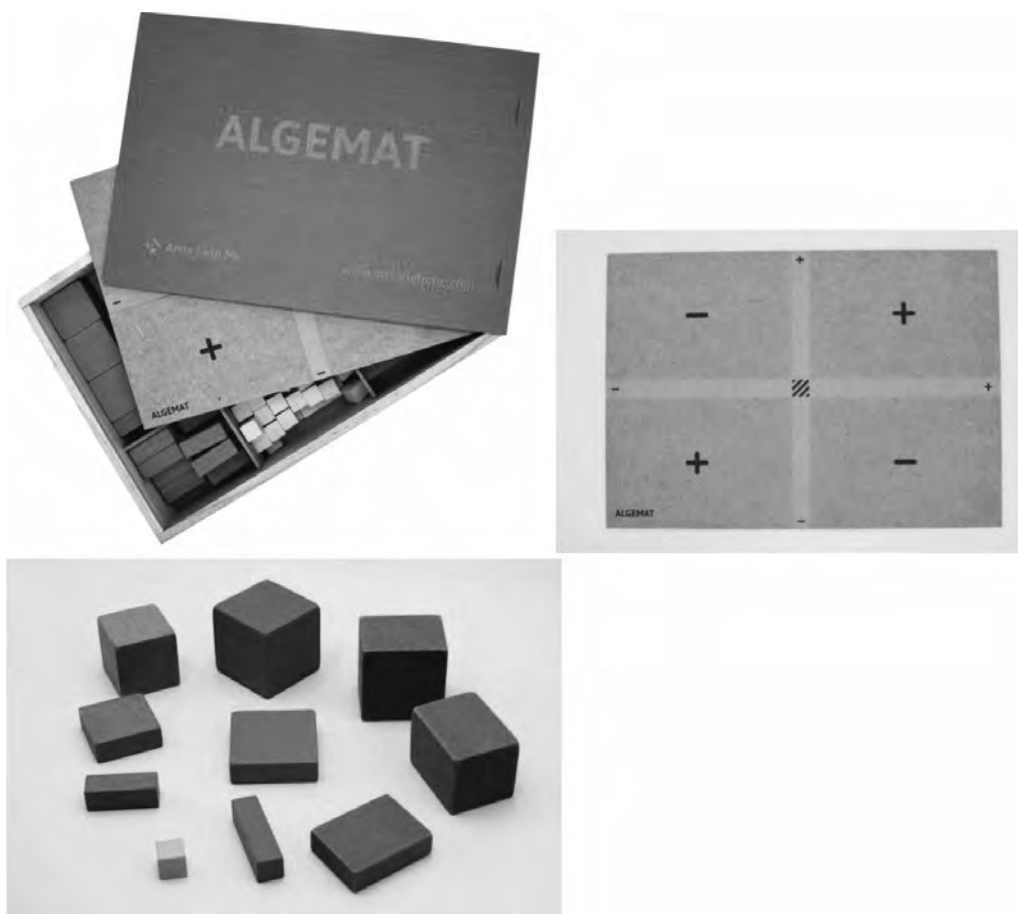


Figura 4. Peces de l'Algemat (Font: elaboració pròpia).

L'interès de molts professors per treballar l'àlgebra amb materials manipulatius ha donat lloc a nombrosos recursos. Entre els més estesos hi ha els blocs de Dienes i els reglets de M. Antònia Canals. La taula 1 recull les diferències que ens proposen l'Algemat, l'Algeblocks i l'Algebra Lab Gear respecte dels que tenen més penetració a Catalunya.

Taula 1. Comparativa de materials manipulatius.

Blocs de Dienes (1963)	Tot i que constitueixen el material base dels altres que mencionem, només hi podem treballar amb una sola variable. I, a més, les peces que la representen contenen un nombre exacte d'unitats. És per això que aquest material està més indicat per treballar els nombres naturals, els decimals positius, etc.
Reglets de M. Antònia Canals (anys setanta)	Es pot arribar a treballar l'àlgebra amb els reglets, però pot crear confusió, ja que cada reglet correspon a un nombre exacte d'unitats i la idea de variable es perd. Tampoc conté peces que relacionin dues variables. Per tant, estan més indicats per treballar l'aritmètica.
Algemat (2020) Algeblocks (1996) Algebra Lab Gear (1994)	Amb aquests materials podem treballar amb dues variables i les peces no tenen assignat un nombre exacte d'unitats. D'altra banda, mantenen la idea de variable i també incorporen les peces que relacionen dues variables: xy , x^2y i y^2x .

Ara que ja hem vist com va sorgir l'Algemat i què és, farem una pinzellada de com es fa servir!

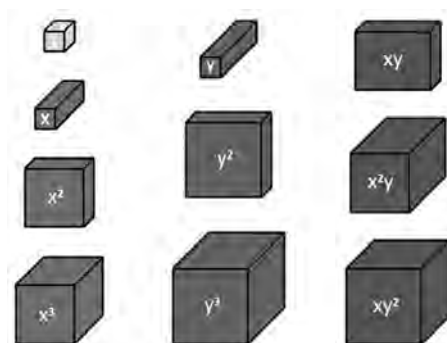


Figura 5. Peces de l'Algemat amb la seva denominació.

Un aspecte important que cal destacar és que aquestes peces no tenen signe. Dependrà d'on les situem al tauler, dins els eixos (a manera de distància, per exemple en la figura 6 a la dreta) o als quadrants del tauler (a manera d'unió, en la figura 6 a l'esquerra), que seran positives o negatives.



Figura 6. Representacions de $-2x$.

En la figura 6 es pot veure representada l'expressió $-2x$ de dues maneres diferents: la de l'esquerra és $2x = 2 \cdot x$; per tant, agafem 2 peces x i, en aquest cas, com que estan ubicades a la zona del tauler negatiu, tenim que la seva equivalència és la imatge de la dreta.

Per fer-ho més entenedor i visualitzar les connexions entre aritmètica i àlgebra, farem operacions només amb unitats i les mateixes operacions amb expressions algebraïques.

Podem observar que la forma geomètrica que adopten les unes i les altres són les mateixes.

3.1. Operació suma

$$2 + 3 = 5$$



Figura 7. Exemple operativa de suma.

Podem fer aquesta operació dins un quadrant positiu del tauler (com a unió de conjunts) o a dins d'un eix positiu en què forma una línia (suma de distàncies).

$$-4 + 1 = -3$$

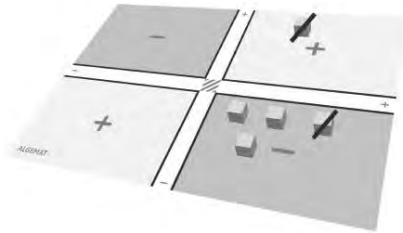


Figura 8. Exemple d'operativa de suma amb nombres de diferent signe.

Dins del tauler no hi poden conviure les mateixes peces en positiu i en negatiu alhora, ja que s'anul·len entre elles (formen zeros). Llavors les traurem del tauler (les hem ratllat en la figura 8 per tal de fer-ho visual).

Un cop hem tret les peces que s'anul·len, el resultat de l'operació serà el de les peces que ens han quedat.

Passem ara a veure com s'opera amb expressions algebraiques.

$$(2x + 3) + (1 - x) = x + 4$$

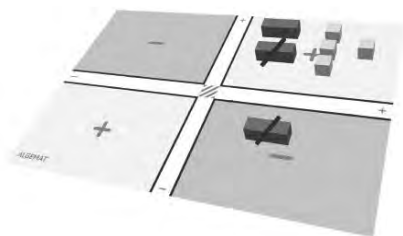


Figura 9. Exemple d'operativa de suma algebraica.

Tot i que seguim el mateix procediment que abans, cal recordar que només es poden sumar i restar monomis semblants. Amb l'Algemat és força evident, ja que les peces han de tenir la mateixa forma i la mateixa mida.

3.2. Operació resta

Quan només treballem amb unitats considerem la resta com a suma de nombres oposats.

$$3 - 1 = 2$$

Posem les peces al tauler com si hi haguéssim escrit $(+3) + (-1) = 2$.

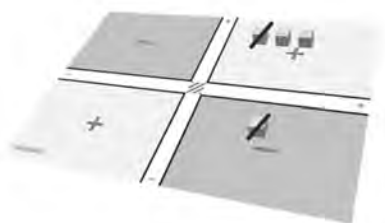


Figura 10. Exemple d'operativa de resta.

Pel que fa a les expressions algebraiques, hem de recordar que un dels tres significats que té el símbol menys és el de l'oposat. Per tant, tot el que tinguem darrere del signe menys, els farem el seu oposat, canviant-los el signe. És per això que a l'hora de distribuir les peces al tauler ja ho fem amb el signe canviat.

$$(3x - 1) - (2 - 2x) = 5x - 3$$

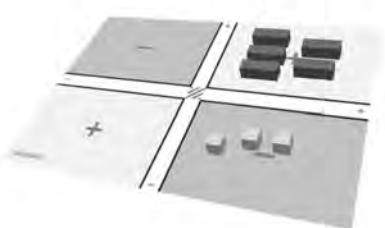


Figura 11. Exemple d'operativa de resta algebraica.

Posem les peces al tauler fent: $(3x - 1) + (-2 + 2x)$: és clar que tenim $3x + 2x = 5x$ (peces rectangulars blaves de la figura 11) i $(-1) + (-2) = -3$ (peces quadrades grogues de la figura 11).

3.3. Operació multiplicació

Hem comentat abans que si fem les sumes dins els eixos es formen línies. Doncs ara, amb les multiplicacions de dos factors, formarem quadrats o rectangles. Haurem de posar els factors en els eixos i el resultat el formarà l'àrea del rectangle que hem construït. Estem treballant en 2D!

$$2 \cdot 3 = 6$$

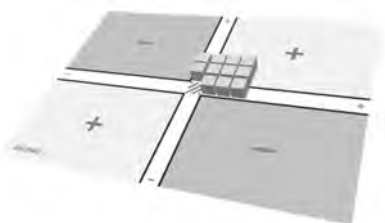


Figura 12. Exemple d'operativa de multiplicació.

Per multiplicar dues expressions algebraiques, haurem de posar-ne una en l'eix vertical (representació del valor 2 en la figura 12) i l'altra en l'eix horitzontal (representació del valor 3 en la figura 12). D'aquesta manera indiquem el valor dels costats que tindrà el rectangle que hem de construir. L'àrea del rectangle serà el resultat d'aquesta multiplicació.

Cal tenir present una de les normes del mètode: el rectangle s'ha d'omplir complint la condició que les peces han d'encaixar. Quan una peça és al costat d'una altra, els costats han de ser iguals. Funciona com un trencaclosques. Vegem ara la manera correcta de col·locar les peces amb l'Algemat:



Figura 13. Exemples de col·locació correcta de peces.

Manera incorrecta de col·locar les peces amb l'Algemat:



Figura 14. Exemples de col·locació incorrecta de peces.

Per tant, per descobrir el producte de dues expressions algebraiques, per exemple $(x + 3) \cdot (x + 1) = x^2 + 4x + 3$, col·locarem en els eixos l'enunciat com indica la figura 15 i seleccionarem les peces adequades (figura 16): així es construeix físicament l'expressió algebraica desenvolupada.

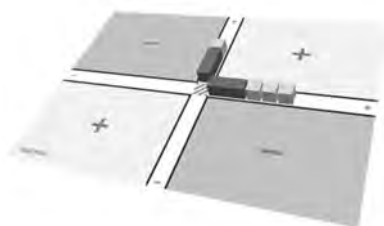


Figura 15. Enunciat de la multiplicació algebraica.

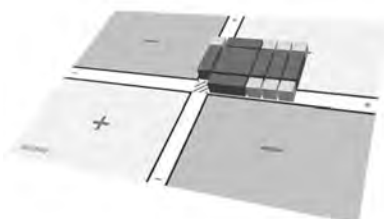


Figura 16. L'àrea del rectangle és el resultat de la multiplicació.

Vegem ara un altre exemple en què les expressions algebraiques contenen factors oposats: $(-x + 2) \cdot (3x - 3) = -3x^2 + 9x - 6$. Situem $(-x + 2)$ en l'eix vertical i en l'horitzontal fem $(3x - 3)$ com es pot observar en la figura 17. En aquest cas el rectangle que hem de construir ens ocupa els quatre quadrants del tauler.

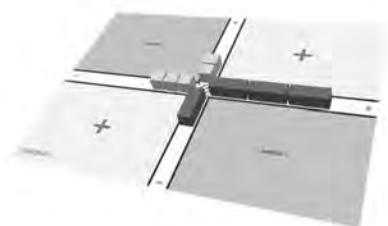


Figura 17. Enunciat de la multiplicació.

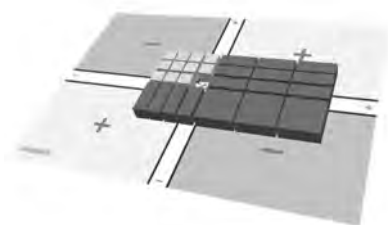


Figura 18. Resultat de la multiplicació.

Quan fem multiplicacions amb polinomis, hem de tenir en compte si cal fer anul·lacions de peces (en els exemples exposats no n'hi ha) i llavors fer el recompte de les peces de tots els quadrants.

I si multipliquem 3 factors? Trobarem prismes o cubs. Estem treballant amb volums i per tant, en 3D!

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

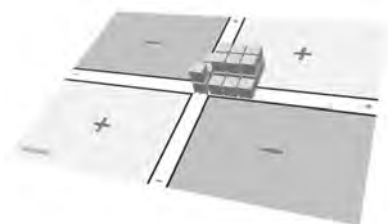


Figura 19. Enunciat de la multiplicació de 3 factors.

$$x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

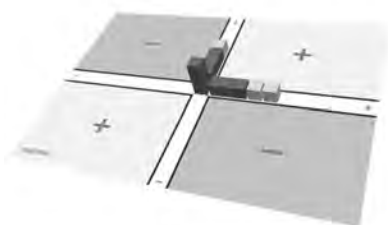


Figura 20. Enunciat de la multiplicació algebraica.

En aquest cas el resultat de la multiplicació agafa el volum d'un prisma (figura 21).

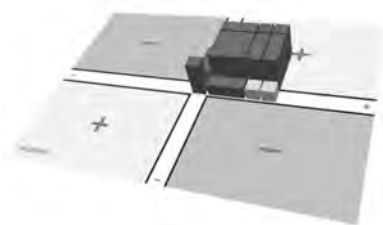


Figura 21. Resultat de la multiplicació.

3.4. Operació divisió

Quan dividim, el dividend serà l'àrea d'un rectangle que hem de construir, amb la condició que un costat mesuri el que indica el divisor. La resposta la trobem en l'altre costat del rectangle (eix horitzontal, figura 22).

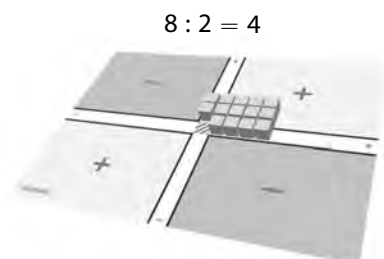


Figura 22. Resultat de la divisió.

$$(x^2 + 3x + 2) : (x + 1) = x + 2.$$

Si situem el divisor en l'eix vertical (com es pot observar en la figura 23), aleshores cal formar un rectangle amb el dividend tenint en compte que un costat ha de ser el divisor. El resultat de la divisió el trobem en l'eix que ens quedava per omplir (figura 24).

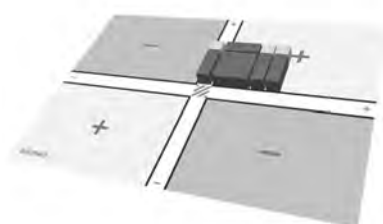


Figura 23. Enunciat de la divisió.

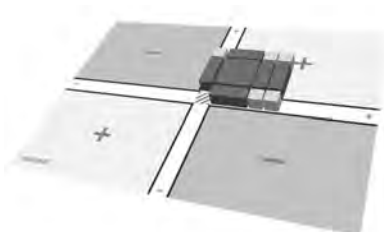


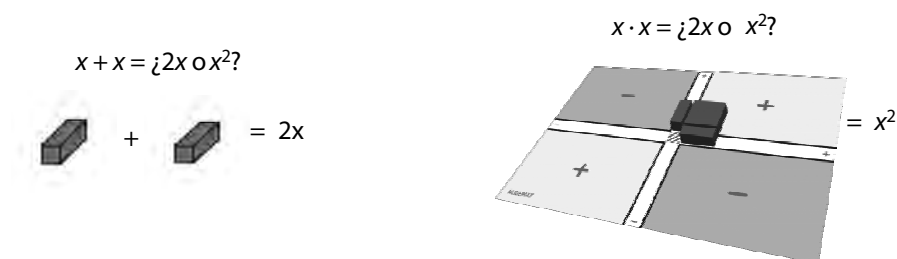
Figura 24. Resultat de la divisió.

3.5. Idees metodològiques per utilitzar Algemat a l'aula

Personalment, faig servir l'Algemat a l'inici de tots els continguts que habitualment es programen a segon i tercer de l'ESO, i paral·lelament amb la descoberta de com es fa segons la tradició. Permet que l'alumnat visualitzi l'àlgebra dins un context geomètric perquè després puguin treure les seves conclusions. Un cop ho han entès amb el material, la pregunta és: com ho faries sense l'Algemat?

Si han entès bé els conceptes són capaços d'explicar-ho de la manera com el professorat ho fa habitualment. També hi ha professorat que l'utilitza a quart d'ESO com a consolidació de continguts o fins i tot a primer de batxillerat per treballar uns aspectes concrets.

Treballar amb material obliga l'alumnat a focalitzar l'atenció, i així es poden evitar algunes de les confusions més habituals. Dos exemples:



La dinàmica de manipulació de les peces és beneficiosa perquè:

- Ajuda a fixar-se més en la lectura de l'enunciat (si és una suma, una multiplicació, etc.).
- Permet una comprensió més profunda de les operacions bàsiques, ja que es veuen des d'una altra perspectiva, vinculada a la forma geomètrica.
- Preveuen els resultats (els visualitzen) i a mesura que avancen no necessiten moure les peces. És llavors quan treuen conclusions.

També hi trobem algunes limitacions, en aquests materials, per exemple:

- No permeten treballar amb nombres decimals ni fraccionaris. Sempre es treballa amb nombres enters perquè no podem partir les peces.
- Només s'hi pot treballar amb quantitats limitades (segons la quantitat de peces de què disposem).
- No permet treballar amb monomis de grau superior a 3 (volums).

Finalment, arribem a la conclusió que les operacions que s'han après a fer amb aritmètica també es poden fer amb àlgebra i que, totes, mirant-les des del punt de vista geomètric, adquireixen unes formes concretes.

El material Algemat també permet, a banda de les operacions que hem vist, fer equacions de 1r, 2n i 3r grau, i treballar conceptes com ara: identitats notables, factorització, monomis semblants, valor numèric d'un polinomi, etc.

Després d'acabar de dissenyar l'Algemat i d'haver-lo utilitzat amb els meus alumnes, vaig pensar que potser altres professors hi podrien estar interessats. Ara bé, donar a conèixer el material per ell mateix és insuficient si el que es pretén és implementar un canvi en el sistema educatiu. Cal un acompanyament al professorat i remarcar la importància de la seva formació contínua. És per això que em vaig embranchar en el naixement d'Anna Help Me, un projecte que vol ajudar els professors en l'obtenció de recursos manipulatius i en l'anàlisi dels materials. De manera que faig assessorament a docents, imparteixo cursos i escric llibres divulgatius (Vilaró 2023a, 2023b). Si voleu saber-ne més, podeu veure una vintena de vídeos que ho expliquen a www.annahelpme.com o directament al canal del Youtube d'Anna Help Me.

Si ho heu trobat interessant, us animo a compartir l'Algemat amb aquells professors a qui encantaria trobar un material manipulatiu que els permetés treballar les matemàtiques a secundària!

4. Agraïments

Moltes gràcies als lectors i les lectores si heu arribat fins aquí! Vull adreçar un agraïment especial a la Noemí Ruiz Munzón per haver-me ajudat a escriure l'article.

Bibliografia

- [1] Blanco, Rocío; Solares, Cristina (2017). «Bloques multibase, Algeblocks y otros recursos para tocar las Matemáticas en Primaria y Secundaria». *VIII CIBEM Libro de resúmenes*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas FESPM.
- [2] Bruner, J. (1960). «The Process of Education». Cambridge, MA: The President and Fellows of Harvard College.
- [3] Dewey, J. (1938). «The philosophy of the arts». *John Dewey: The Later Works*, 13(357-368).
- [4] Dienes, Z. P. (1969). *An Elementary Mathematics Program*. https://archive.org/details/ERIC_ED031397.
- [5] Goñi, J. M., Llenares, S., López-Goñi, I., Penalva, M. C., Planas, N., Valls J., Vanegas, Y. M., Corbalán F. i Giménez, J. (2011). *Didáctica de las Matemáticas* (vol. 12). Graó.
- [6] Katz, V. J. Barton, Bill (2007). «Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185 --201.
- [7] Piaget, J. 1971. *Genetic Epistemology*, Edited by: Duckworth, E. Nova York: Norton.
- [8] Post, T. R. (1981). «The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts». *A Selected issues in mathematics education* (p. 109-131). Berkeley, CA: National Society for the Study of Education and National Council of Teachers of Mathematics, McCutchan Publishing Corporation.
- [9] Silva, L. E. da(2018). «Ensino intradisciplinar de Matemática através da resolução de problemas: o caso do Algeblocks». [Postgrau en Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista]. <http://hdl.handle.net/11449/154125>.
- [10] Silva, L. E. da; Camargo, A. S. M. de; Oliveira, P. C. (2021). «Propuestas didácticas para la educación básica que implican el uso del material manipulativo Algeblocks». *Revista Chilena de Educación Matemática*, vol. 13, núm. 2, p. 68-77.
- [11] Vilaró Utrillo, Anna. «Algemat-Guia didáctica». (2023a) ISBN: 978-84-09-52109-8.
- [12] Vilaró Utrillo, Anna. «Algemat-Quadern». (2023b) ISBN: 978-84-09-51902-6.

Connexió entre el 2D i el 3D... amb GeoGebra!

Bernat Ancochea Millet | Guillem Bonet Carbó

ACG (Associació Catalana de GeoGebra)

bancoche@xtec.cat | gbonet2@xtec.cat

Resum

El procés d'abstracció d'observar un desplegament pla i visualitzar la figura corresponent en 3D no és senzill, però es pot treballar amb diferents exercicis. En aquest article n'esmentarem uns quants. Parlarem d'activitats que poden ajudar a l'hora de treballar la visió espacial i d'establir la connexió entre un poliedre en l'espai i la seva descomposició en el pla. També ens proposem modelitzar, i després construir, alguns d'aquests desenvolupaments per connectar-los amb la seva figura original passant del 2D al 3D i viceversa.

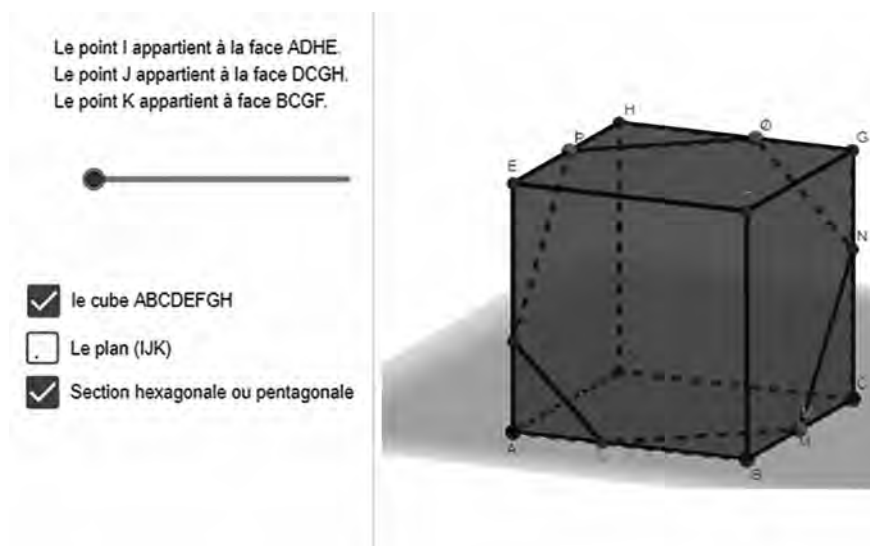
Abstract

The abstraction process of looking at a flat display and visualising the corresponding figure in 3D is not simple, but can be worked on with different exercises. In this article, we discuss some of them. We talk about other activities that can help with spatial vision and establishing the connection between a polyhedron in space and its decomposition on the flat plane. We also propose modelling and then building some of these developments to connect them with their original figure going from 2D to 3D and vice versa.

1. Introducció i alguns referents

El 27 de febrer de 2024 es va celebrar la XVI Jornada de l'Associació Catalana de GeoGebra (ACG). En aquesta jornada vam poder seguir experiències d'aula molt interessants en què el programa de geometria dinàmica hi té un paper important. En aquest sentit Jean Baptiste Étienne ha estat font d'inspiració per aquest article. En la seva exposició, el professor Étienne, que treballa al Lycée Français de Múrcia, va connectar d'una manera brillant el GeoGebra amb la manipulació directa fent servir paper i tisores a través d'un problema clàssic del currículum francès. En el seu treball descriu l'estudi de la dissecció d'un cub a través d'un pla oblic amb l'objectiu d'exercir la visió espacial i connectar els conceptes referents a la geometria del pla amb els de l'espai.

La idea proposada per Étienne (2024a) és prou simple: escollir tres punts sobre el cub i seccionar el cub fent servir el pla que passa per aquests punts. Però com es pot fer això? Proposa utilitzar un cub digital, creat amb GeoGebra, i tallar-lo amb el pla. Un cop fet, cal dissenyar els desplegaments plans de cadascuna de les dues seccions i muntar-los amb GeoGebra, és a dir, fer que el programa de geometria dinàmica converteixi el desplegament en un dels cossos 3D en què hem dividit el cub inicial. Alhora, es demana la comprovació amb paper i tisores, és a dir, es demana que l'alumne imprimeixi els dos desplegaments que ha fet amb GeoGebra al full de cartolina i que munti les dues peces, construint d'aquesta manera el cub inicial. Tot plegat una experiència molt bonica.



Imatge 1. Secció hexagonal d'un cub tallat per un pla. Construcció de J. B. Étienne (2024b).

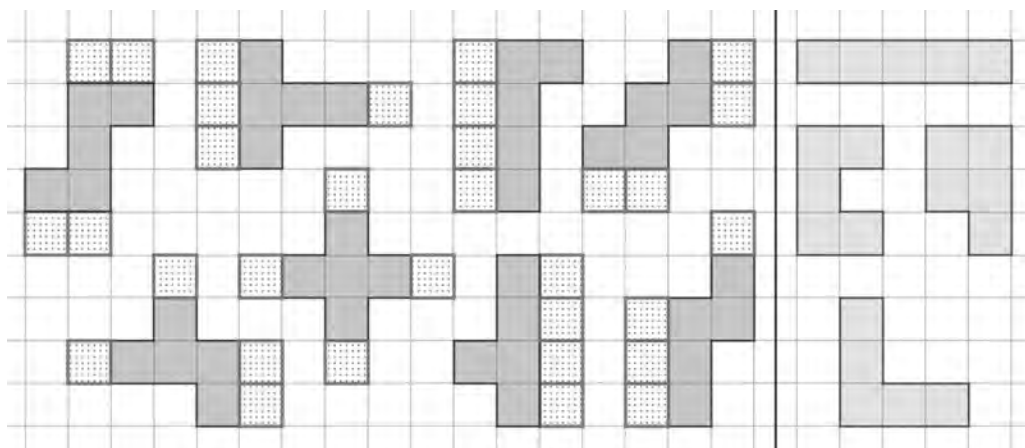
Aquestes idees ens van fer reflexionar sobre la nostra manera de treballar la geometria en l'espai. De ben segur que, remenant entre les diferents experiències que hem portat a l'aula, trobaríem activitats de manipulació interessants com ara la d'esbrinar quants cossos platònics hi ha, les característiques més significatives dels poliedres arquimedians, la construcció de prismes i piràmides i la relació que hi ha entre els volums, la descoberta de la fórmula d'Euler... Tot plegat un conjunt d'experiències prou memorables per ser emmarcades. Després de la reflexió vam començar a dissenyar-ne una de nova: la creació del desplegament pla d'un poliedre.

2. Desplegament pla d'un poliedre

Tothom, en l'adolescència, ha muntat poliedres a través del seu desplegament pla, convertint un esquema de dues dimensions en una figura en l'espai, tot plegat un procés màgic. Un cop n'hem construït uns quants es produeix un canvi de mirada en la persona que manipula els cossos; només veient el desenvolupament pla i abans de començar-lo a retallar, es comença a imaginar quin serà el cos que en resultarà. Aquest procés, que esdevé de manera inconscient, ens sembla fascinant.

Però el camí per treballar i adquirir el sentit espacial és llarg i no s'integra només muntant uns quants desenvolupaments plans. Cal treballar diferents aspectes dels poliedres en el pla i en l'espai per anar establint les bases de la connexió que pretenem crear.

Comencem el nostre camí amb una activitat introductòria del que vindrà després. Ens proposem fer una cerca exhaustiva i trobar tots els pentòminos possibles. És probable que ja haguem treballat aquesta activitat anteriorment, en aquest cas podríem passar la llista dels pentòminos directament. Per fer la cerca pot ser molt útil l'ús de materials, com ara els polígons que encaixen. Aquesta mena de materials també ens serà útil per ampliar l'activitat i preguntar-nos quins dels pentòminos trobats poden convertir-se en un cub sense tapa i, en aquest cas, la pregunta següent que ens ve al pensament seria on del desplegament hauríem de posar la tapa. Aquesta activitat, tot i que ja és molt coneguda, ens serveix per començar a introduir els desplegaments.

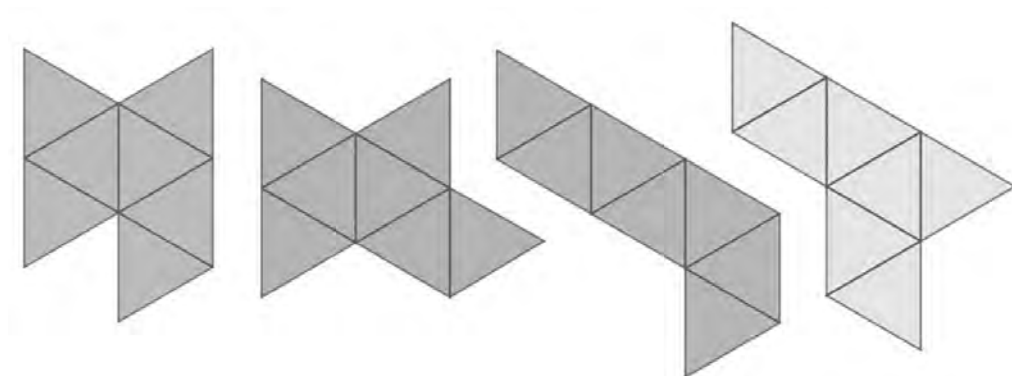


Imatge 2. Pentòminos convertibles a capsa amb proposta de tapa.

La proposta pot ser ampliada estudiant els poliamants (figures planes creades usant un nombre determinat de triangles equilàters). En aquest segon cas, el dels poliamants, costa copiar l'activitat que hem realitzat amb els poliòminos, vistos com a desplegaments de cubs, ja que amb triangles equilàters només podem crear dos poliedres regulars amb «pocs» triangles: el tetraedre, amb 4, i l'octaedre, amb 8.

L'estudi del primer cas, buscant quants triamants hi ha, és massa senzill, mentre que el del segon amb la cerca del nombre d'heptamants és massa complex. El que sí que podem fer és desfer el camí i partir ja del poliedre.

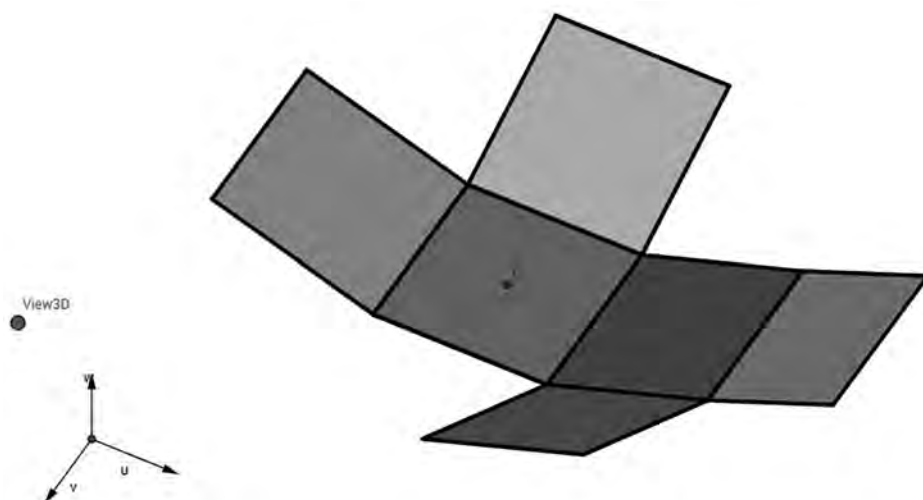
Aquí ens preguntem sobre el desplegament pla d'un octaedre (molt adequat per treballar amb materials); un cop trobat, eliminem un dels triangles de la vora i ens preguntem on més el podríem posar per aconseguir tancar l'octaedre. Per exemple, en la imatge següent, on posaríeu el vuitè triangle per obtenir el desplegament d'un octaedre? Quantes opcions hi ha en cada cas?



Imatge 3. Quatre heptamants. Desplegament d'un octaedre sense tapa.

Ja hem comentat que a l'hora d'esbrinar quins pentòminos es poden convertir en capsos sense tapa és important l'ús de material manipulable. L'ús de materials i viure el procés de muntatge ens permet gravar mentalment una seqüència de fotogrames que acaba connectant cada desplegament amb la seva figura final: el cub o, en aquest darrer cas, l'octaedre.

Un segon pas per enfortir aquesta connexió pot ser l'ús de materials creats digitalment, per exemple amb GeoGebra. El programa permet fer la visualització del plegament del cub (i d'altres poliedres) en la finestra 3D fent servir l'eina «Desplegament». Quan creem aquest desplegament se'ns genera un punt lliscant que ens permet muntar i desmuntar el cub de manera automàtica.

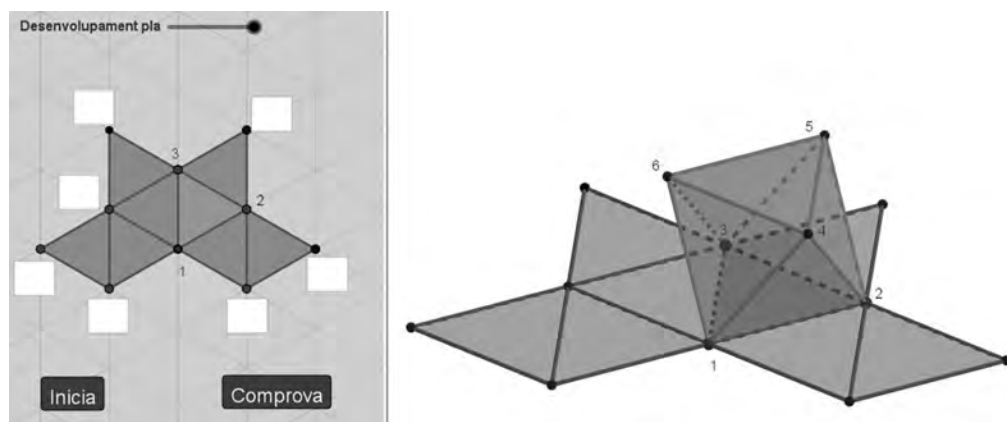


Imatge 4. Desenvolupament del cub. Construcció de D. Mentrard (2017).

Ara bé, el GeoGebra només ens ofereix un desplegament del cub. Què passa amb els altres? Ens proposem que els alumnes muntin el seu propi cub amb GeoGebra utilitzant qualsevol dels altres desplegaments trobats. Un cop creat el desplegament escollit a la finestra 2D fent servir els 6 quadrats que representaran les 6 cares del cub, aquest desplegament es visualitza a la finestra 3D de manera automàtica. Ara, la feina serà girar cadascuna de les cares per

construir el cub. Aquí treballarem el gir d'una cara al voltant d'un eix, amb l'eina «Rotació al voltant d'un eix» de la finestra 3D).

Una darrera activitat que ens agrada a l'hora de connectar el desplegament pla d'un poliedre amb la seva figura 3D és la de comprovar la fórmula d'Euler... Si ho fem directament sembla que no funciona, què passa? Efectivament, hi ha vèrtexs i arestes que es repeteixen. Com podem treballar i consolidar aquesta idea? La primera opció és analitzar diferents descomposicions d'un mateix poliedre: sempre queda desaparellat, el mateix nombre d'arestes i de vèrtexs? Quina relació tenen amb el poliedre?



Imatge 5. Activitat autocorrectiva per connectar vèrtexs d'un octaedre.

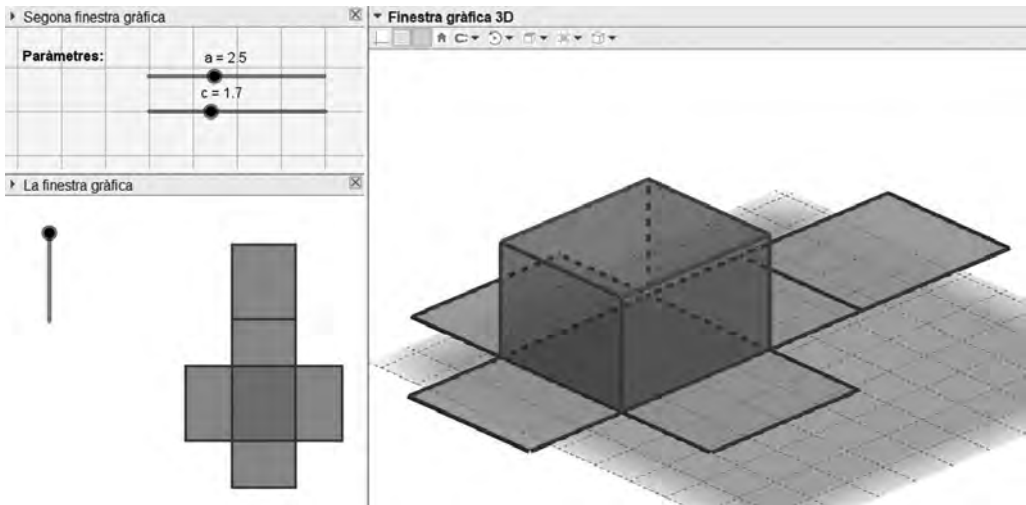
Una altra proposta és la de connectar arestes i vèrtexs que es corresponguin. Com veiem en la imatge 5, hem creat una aplicació autocorrectiva de GeoGebra que permet a l'usuari fer propostes de quins vèrtexs es repeteixen i on estan situats en el desplegament. Un cop fet, el programa mateix corregeix el procés i permet visualitzar a la finestra 3D la comprovació de la correcció plegant digitalment la figura.

3. Visualitzar, analitzar, modelitzar i construir... amb GeoGebra

En les activitats anteriors hem començat a familiaritzar-nos amb els cossos «senzills» connectant el seu desenvolupament amb la visió espacial del cos. El nostre objectiu ara és avançar en la investigació estudiant aquells cossos «menys senzills» que es deriven dels que ja hem estudiat.

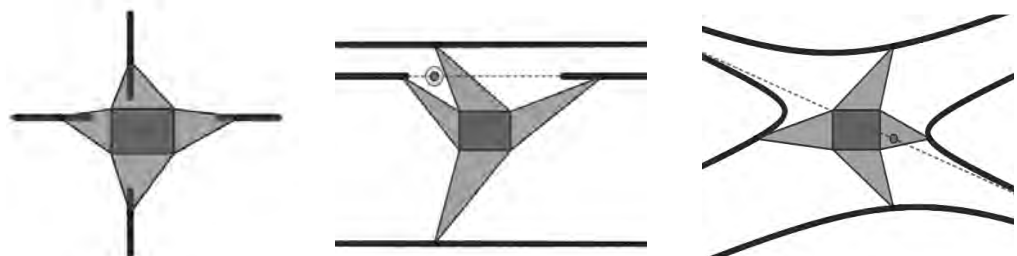
Amb aquest objectiu podem utilitzar algunes aplicacions creades amb GeoGebra per modificar mínimament la figura en 3D i detectar quins canvis s'han produït en el seu desenvolupament pla.

Així, per exemple, podem analitzar com varia el desenvolupament pla d'un ortoedre a mesura que en modifiquem l'alçada, o el desenvolupament pla d'una piràmide si en movem la «punta», fixant-nos especialment en quines característiques del desenvolupament canvien i quines no.



Imatge 6. Desenvolupament de l'ortoeidre.

En el cas de la piràmide rectangular també podem analitzar el traç dels punts associats al vèrtex en el desplegament. Així, si movem el vèrtex en direcció vertical, en quina direcció es desplaçaran els vèrtexs de la seva descomposició plana? Com es modificarà la figura? I si el movem en una direcció horitzontal en alçada i paral·lela a un costat? I si ho fem en una direcció horitzontal en alçada però no paral·lela a cap costat?

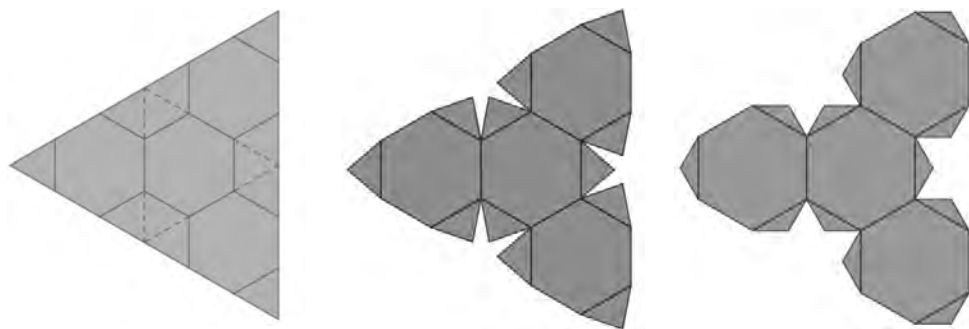


Imatge 7. Estudi de la posició dels vèrtexs d'una piràmide rectangular.

A la imatge 7 es mostra part d'aquest estudi, primer movent el vèrtex de manera perpendicular a la base. A les dues de la dreta, el vèrtex es mou sobre una línia, i en el cas central la línia és paral·lela a un dels costats de la base, al darrer no.

Podem complicar també l'anàlisi amb propostes de canvi més complexes, com ara la de truncar les puntes o les arestes del cub i veure què passa llavors amb el seu desenvolupament pla. L'ampliació d'aquesta activitat ens condueix a un estudi molt interessant sobre la variació del nombre de cares, arestes i vèrtexs, o sobre la forma de les cares.

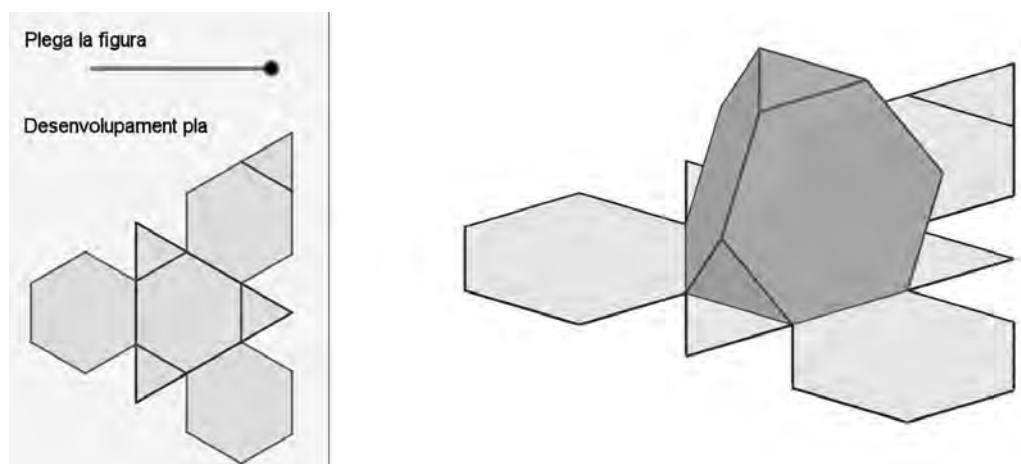
Per acabar aquest secció, un petit rept... Us proposem visualitzar quines figures donaran els següents desenvolupaments plans (alguns desplegaments admeten dues solucions diferents). Cal retallar també per la línia de punts.



Imatge 8. Exemples de tres desenvolupaments semblants.

Com a observació d'aquest petit exercici, els hexàgons són tots regulars i les alçades dels triangles isòsceles de la segona i tercera imatges mesuren, respectivament, $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ de les alçades dels triangles equilàters de la primera.

Un cop ens hem familiaritzat prou amb els desenvolupaments plans de diferents figures podem anar més enllà i utilitzar el GeoGebra per dissenyar i crear una figura en 3D. Volem muntar un cos «senzill» a partir del seu desenvolupament pla d'una manera semblant a com ho hem fet amb el cub en l'apartat anterior. Per fer-ho és imprescindible que els alumnes estiguin familiaritzats amb les eines del programa.



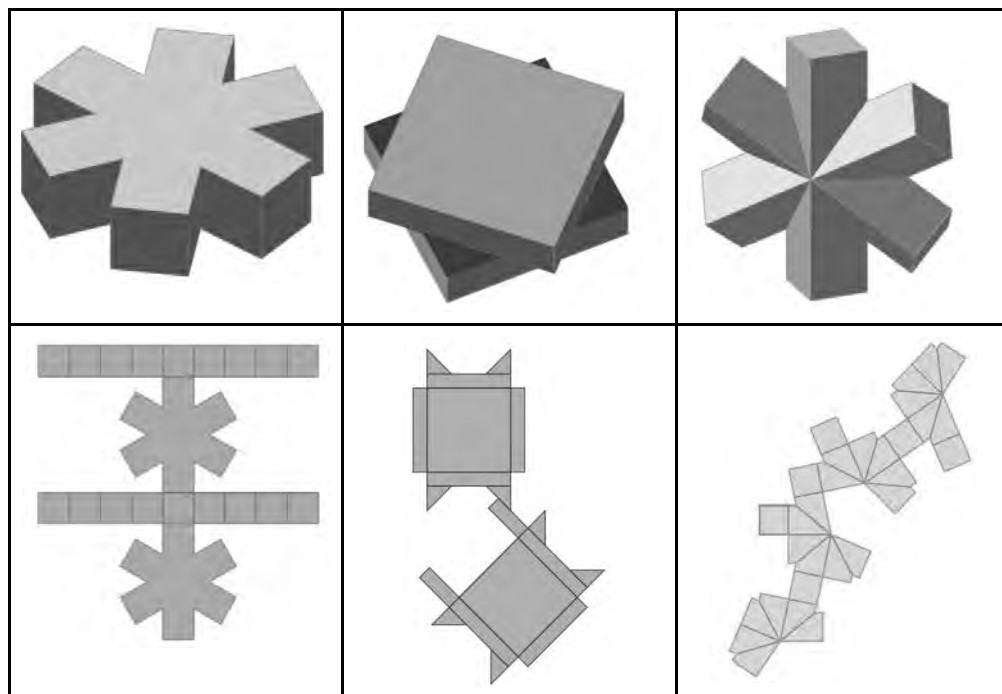
Imatge 9. Tetraedre truncat creat a partir del seu desenvolupament pla.

Amb aquesta activitat continuem en la línia de treballar la visualització de cossos en 3D i, en aquesta ocasió, ens fixem especialment en els angles en l'espai, ja que haurem de girar cares de la figura segons aquests angles.

La tasca requereix una certa habilitat i treballar amb girs, la qual cosa pot presentar dificultat de bon començament. Per això és aconsellable muntar primer el desplegament imprès en paper i estudiar-ne els diferents girs, les combinacions de moviments i els angles que hi intervenen, i després, crear l'aplicació. Els resultats que s'assoleixen acostumen a ser grans obres d'art.

4. Fer possible l'impossible

En aquesta última secció proposem crear el desenvolupament pla d'una figura en tres dimensions aparentment complicada entre algunes de proposades digitalment amb GeoGebra. L'activitat requereix l'ús de tot el que s'ha treballat anteriorment i ens serveix per tancar el cercle.



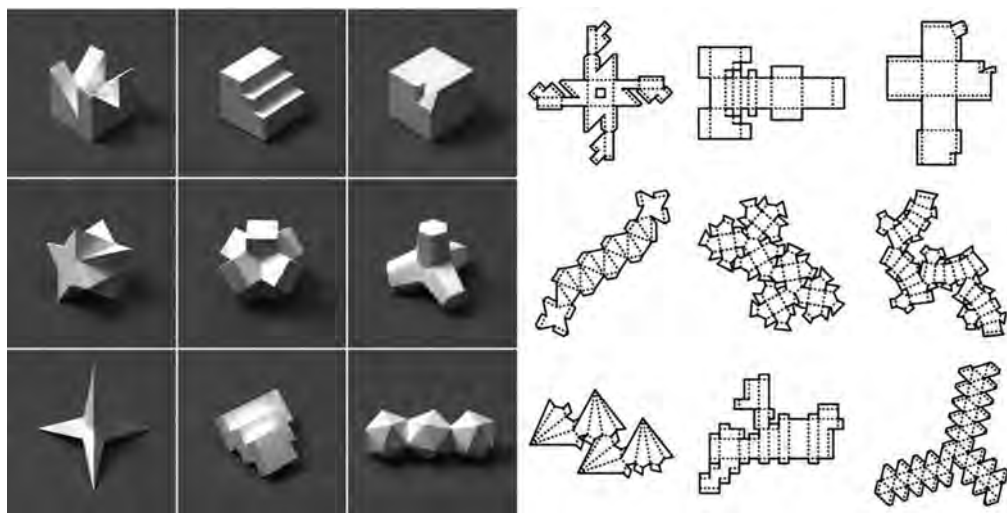
Imatge 10. Cossos de mostra amb els desenvolupaments plans respectius.

Tot i que la proposta és simple, el repte que hi ha al darrere és important: dissenyar el desenvolupament pla d'una figura «complicada» emprant algunes de les eines de la finestra 2D del GeoGebra. El nostre objectiu en aquesta ocasió és doble: d'una banda, treballar la visualització d'un cos 3D observant la relació entre cares, arestes i vèrtexs, i decidint quina és la distribució òptima per endreçar el desplegament. De l'altra, crear el desplegament en la finestra gràfica de GeoGebra —i aquí caldrà considerar la forma de les cares, les distàncies i els angles. Alhora, ens obrirà la possibilitat de fer servir eines bàsiques dels moviments del pla (translacions, simetries i girs) per anar construint el desplegament dissenyat.

Un cop feta la proposta de desplegament, la imprimirem en cartolina i la muntarem per comparar el resultat final amb la figura digitalitzada de l'inici. D'aquesta manera hi podrem detectar possibles errors i comprovar l'adequació del resultat final amb el cos esperat.

Agraïments

No volem acabar sense posar en relleu l'esforç titànic d'alguns alumnes a l'hora de realitzar aquestes activitats que, un cop acabades, veient el resultat final, aconsegueixen provocar-los un somriure de satisfacció.



Imatge 11. Desplegaments proposats per M. Motoyama a X. Foto: Riko Okaniwa.

També volem fer un reconeixement dels treballs de grans dissenyadors de materials de GeoGebra, com ara els de J. B. Étienne i la inestimable obra de Maho Motoyama, que ens té fascinats amb les seves propostes de desplegaments de figures aparentment impossibles.

Referències bibliogràfiques

- [1] Ancochea, B. i Bonet, G. (2024). «Desarrollos planos de figuras increíbles». <https://www.geogebra.org/m/a4ceuatv>. (Consultat 27/8/2024)
- [2] Ancochea, B. i Sorigué, I. (2017). «Cubos». <https://www.geogebra.org/m/VBjNpksu/>. (Consultat 12/8/2024)
- [3] Étienne, J. B. (2023). «Solides de l'espace». <https://www.geogebra.org/m/bxvsjmsq/>. (Consultat 12/8/2024)
- [4] Étienne, J. B. (2024a). «Desarrollos de los sólidos obtenidos (sección hexagonal regular)». <https://www.geogebra.org/material/show/id/yx8at5y8/>. (Consultat 12/8/2024)
- [5] Étienne, J. B. (2024b). «GeoGebra, papel y tijeras». <https://www.geogebra.org/m/h5srzccw>. (Consultat 12/8/2024)
- [6] Mentrard, D. (2017). «Les 11 patrons du cube». <http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/HTML/Patroncubet.html>. (Consultat 12/8/2024)

.....

Viatge interplanetari: aprendre matemàtiques amb l'univers com a escenari

Roser Matas Nadal

Docent de matemàtiques
rmatas2@xtec.cat

Xavier Sánchez Carrasco

Docent de biologia i geologia
xsanche6@xtec.cat

Marc Faüchs Xifra

Docent de física i química
mfauchs@xtec.cat

Resum

Aquest article presenta el projecte «Viatge interplanetari», una experiència educativa que ha permès a l'alumnat de primer d'ESO de l'institut Antoni Pous i Argila viure l'emoció de l'aprenentatge des d'una perspectiva pràctica i creativa. A través de la construcció de maquetes a escala del sistema solar i d'una base a Mart, els estudiants han fet un viatge que els ha dut a treballar d'una manera tangible i significativa conceptes matemàtics com l'escala i la proporció. El projecte no només ha motivat els alumnes a endinsar-se en el món de les ciències i les matemàtiques, sinó que també ha fomentat la col·laboració, el pensament crític i la resolució de problemes. A més, ha demostrat que la coordinació entre docents de diferents disciplines pot transformar el procés d'ensenyament i convertir-lo en una aventura apassionant i enriquidora tant per a alumnes com per a professors.

Abstract

This article presents the Interplanetary Journey project, an educational experience that allowed 1st-year secondary students at Antoni Pous i Argila High School to experience the thrill of learning through a practical and creative approach. By building scale models of the solar system and a Martian base, students embarked on a journey that made mathematical concepts like scale and proportion tangible and meaningful. The project inspired students to delve into the worlds of science and mathematics and encouraged teamwork, critical thinking, and problem-solving. It highlighted how interdisciplinary teacher collaboration can transform teaching into an exciting and enriching adventure for students and educators.

1. Introducció

Aquest article explica el disseny i la implementació a l'aula del projecte de ciències «Viatge interplanetari», fent èmfasi en com es treballen les matemàtiques. És un projecte STEAM, acrònim anglès que engloba les disciplines educatives següents: Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics (Ciència, Tecnologia, Enginyeria, Art i Matemàtiques), adreçat a alumnat de primer d'ESO, de l'institut Antoni Pous i Argila de Manlleu.



Es tracta d'un centre d'alta complexitat amb un alt percentatge d'alumnes amb necessitats educatives especials, procedències socioeconòmiques desfavorides i un context multicultural. Aquests factors fan que sigui essencial adoptar metodologies educatives que no tan sols atenguin la diversitat sinó que també motivin i involucrin tots els alumnes en el procés d'aprenentatge.

El treball per projectes permet als estudiants aplicar els seus coneixements en situacions reals i significatives, de manera que es fomenta una comprensió més profunda dels conceptes i una més gran implicació en el propi aprenentatge. Aquest enfocament promou el desenvolupament de competències transversals com la col·laboració, la comunicació, el pensament crític i la creativitat.

Per a l'equip de docents que participen en aquest projecte, fer matemàtiques significa molt més que ensenyar a resoldre operacions i equacions. Implica ajudar els estudiants a desenvolupar una comprensió profunda i funcional dels conceptes matemàtics, aplicant-los a situacions reals i interdisciplinàries. Fer matemàtiques en aquest context vol dir fomentar el pensament crític i la resolució de problemes, i per tant el fet de promoure les capacitats analítiques i de raonament lògic. També suposa col·laborar d'una manera interdisciplinària, integrant les matemàtiques amb ciència, tecnologia, enginyeria i arts.

2. Desenvolupament

En el projecte **Viatge interplanetari** es treballen els elements de l'univers, i l'estudi se centra en el sistema solar. Les activitats de matemàtiques estan dissenyades per treballar les unitats de longitud d'una manera propera i pràctica. En un primer moment, els alumnes mesuren objectes quotidians dins i fora de l'aula, fan canvis d'unitats, i finalment apliquen conceptes d'escala i factors de conversió.

L'alumnat té dos encàrrecs principals:

- A. Determinar les distàncies dels planetes del sistema solar i les seves dimensions, plasmant aquesta informació en una maqueta a escala.
- B. Construir una base a Mart per a la tripulació d'Hypatia Mars,¹ amb l'objectiu que la humanitat s'hi pugui establir d'aquí a uns anys.

Aquestes activitats tenen en comú diversos elements i criteris que en guien el disseny:

1. <https://hypatiamars.com/>.

- A. **Contextualització pràctica:** Ambdues tasques es basen en aplicacions pràctiques dels conceptes matemàtics. Els alumnes treballen amb mesures reals i projectes concrets, que fan que per a ells l'aprenentatge sigui més significatiu i rellevant.
- B. **Interdisciplinarietat:** Les activitats integren diversos àmbits del coneixement. El projecte combina matemàtiques amb ciències, tecnologia i enginyeria, de manera que els estudiants poden veure com es relacionen i s'apliquen conjuntament les diferents disciplines.
- C. **Creativitat i innovació:** En la construcció de la maqueta i la base a Mart, es fomenta la creativitat i la innovació, ja que els alumnes han de pensar fora dels esquemes convencionals i explorar noves idees.
- D. **Autonomia i responsabilitat:** Les activitats impulsen l'autonomia dels estudiants, ja que han de prendre decisions sobre com abordar les tasques i gestionar els recursos. Això fomenta un sentiment de responsabilitat i confiança en les seves pròpies capacitats.

L'activitat de la maqueta de distàncies al Sol s'inspira en materials i recursos del programa Network for Astronomy School Education² (NASE), entitat que promou i dona eines per treballar l'astronomia a primària i a secundària, i concretament en el taller Planetes i exoplanetes, els autors del qual són Rosa M. Roser, Hans Deeg i Ricardo Moreno (Avilés i Deeg, 2004).

La idea de fer una maqueta surt del projecte «Seguiment de la missió Hypatia». En aquest programa, les dones científiques llancen el repte de construir una maqueta d'una missió a Mart, oferint un context inspirador i realista per a l'aprenentatge interdisciplinari.

2.1. Com ens organitzem?

El projecte es desenvolupa durant quatre hores setmanals, distribuïdes en dos dies amb sessions de dues hores cada dia. Un dels dies, les dues hores es fan de manera consecutiva, mentre que l'altre, les sessions estan separades per l'esbarjo. Hi ha un total de quatre grups classe, amb cinc professors implicats en el projecte, dos professors de ciències, un de tecnologia, un de matemàtiques, un de visual i plàstica i el professor d'orientació. Les classes es fan simultàniament a tots els grups (85 alumnes en total).

A cada grup classe l'alumnat es reparteix en diferents equips de tres o quatre alumnes, cadascun dels quals s'inventa un nom relacionat amb el projecte que els identifiqui. Cada alumne/a té el seu propi diari de viatge, on recull les reflexions sobre el que va aprenent, anota les respostes a les preguntes que el professorat fa periòdicament, i elabora petits resums i esquemes. Es combinen activitats individuals i de grup, i es fomenta tant el treball col·laboratiu com l'aprenentatge personalitzat.

2.2. Activitats

El projecte **Viatge interplanetari** inclou un seguit d'activitats seqüencials dissenyades per aprofundir en el coneixement del sistema solar i desenvolupar habilitats científiques i matemàtiques entre els alumnes. Les activitats són les següents:

2. <https://www.naseprogram.org/>.

- A. **Construcció de la maqueta del sistema solar a escala:** Els alumnes construeixen una maqueta del sistema solar a escala tot considerant la grandària dels planetes i la distància que hi ha entre ells. Aquest exercici proporciona una comprensió fonamental dels conceptes d'escala i proporció, aspectes crucials per a projectes posteriors.
- B. **Estudi de les característiques dels planetes:** Cada grup d'alumnes aprofundeix en les característiques d'un planeta específic. Després, han d'explicar aquestes característiques a la resta de la classe, i així es fomenta l'aprenentatge col·laboratiu i l'habilitat de comunicació científica.
- C. **Investigació sobre la vida en altres planetes:** Els alumnes investiguen quins planetes podrien sustentar vida basant-se en les seves característiques. Aquest procés implica aplicar criteris científics per avaluar l'habitabilitat planetària i desenvolupar així el pensament crític i les habilitats d'investigació.
- D. **Enfocament en Mart:** Un cop identificat Mart com el planeta amb més possibilitats d'acollir vida, els alumnes investiguen les condicions adverses que hi trobarien, com ara la manca d'aigua líquida, les temperatures extremes i l'atmosfera fina. Han d'explorar maneres de superar aquests reptes, i per tant fomentar la innovació i la resolució de problemes.
- E. **Construcció de la maqueta de la base a Mart:** Finalment, es presenta el repte que planteja la tripulació d'Hypatia Mars, crear una maqueta de com s'imaginarien una base tripulada a Mart, perquè la humanitat s'hi pugui establir d'aquí a uns anys. Aquest exercici combina tots els conceptes apresos: aplica els coneixements d'escala i proporció, de les condicions ambientals del planeta i les solucions tecnològiques per a la supervivència humana.

Aquestes activitats es dissenyen no només per ensenyar continguts científics i matemàtics, sinó també per desenvolupar competències clau com la col·laboració, la comunicació, el pensament crític i la creativitat.

2.3. Com treballem les matemàtiques?

Abans de començar a treballar amb les escales es fan un seguit d'activitats preparatòries (figures 1 i 2), paral·leles al projecte, amb les quals l'alumnat repassa les unitats de longitud, pren mesures amb regle o cinta mètrica i practica els canvis d'unitats, així es treballa el sentit numèric i de la mesura.

L'activitat de la figura 1 és més senzilla i la fan prenent mides amb la cinta o el regle.

Les parts retallables de les dues activitats no estan disponibles a l'inici, les hi proporcionem al final per tal que comprovin si el que han escrit és correcte.

L'activitat de la figura 2 conté elements que requereixen nombres grans, distància entre planetes, o petits, dimensions de la cèl·lula.

Unitats de mesura de longitud I

1. Escribe les mides de cada dibuix (magnitud i unitats)



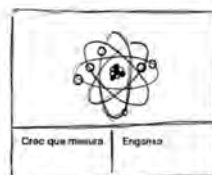
2. Associa cada dibuix amb la mida corresponent, enganxant cada mesura:

5 cm 30 cm 160 cm 70 cm 400 cm 12 cm

Figura 1. Activitat 1 per treballar les unitats de longitud.

Unitats de mesura de longitud II

1. Escribe les mides de cada dibuix (magnitud i unitats)



2. Associa cada dibuix amb la mida corresponent:

0,001 mm 124 km 300 km 1416 920 000 km 10 mm 0,000000001 m 10 dm 20 cm

Figura 2. Activitat 2 per treballar les unitats de longitud.

La motivació de la problemàtica sorgida en les fitxes anteriors dona peu a explicar els factors de conversió i es fa l'activitat de la figura 3 (en blau hi ha les respostes com a guia per al docent). En aquesta activitat es treballen els factors de conversió utilitzant mesures que l'alumnat coneix de la vida quotidiana. Els estudiants reflexionen sobre quina és la unitat de longitud més adequada per a cada situació, i així desenvolupen una comprensió pràctica i aplicada dels conceptes de conversió d'unitats. Dels sabers del currículum, es treballa el sentit de la mesura.

1) INVESTIGA

- a) Quants quilòmetres són 1 U.A. (Unitat astronòmica).

$$1 \text{ UA són } \approx 150 \cdot 10^6 \text{ km}$$

- b) Quants metres són 1 àngström o àngstrom

$$1 \text{ Å són } 10^{-10} \text{ m} = 0'0000000001$$

- c) Per què creus que són útils aquestes unitats de longitud?

Per expressar mides o distàncies molt grans (dist. entre planetes) o molt petites (mides de cèl·lules)

2) LA TEVA ALTURA

- a) Escriu la teva altura en metres 1'60 m (No confondre 160 cm)

- b) Passa la teva altura a quilòmetres utilitzant els factors de conversió.

Indica aquí els càlculs:

$$1'60 \text{ m} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} = 0'0016 \text{ km}$$

- c) Escriu la teva altura en quilòmetres 0'0016 km

- d) Per què no s'expressen les altures de les persones en quilòmetres?

Perquè és més entenedor en metre o centímetres

3) LA LONGITUD DEL TEU PEU

- a) Escriu la longitud del teu peu en centímetres 20 cm

- b) Passa la longitud del teu peu de centímetres a metres utilitzant els FACTORS DE CONVERSIÓ. Càlculs:

$$20 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ cm}} = 0'2 \text{ m}$$

- c) Longitud del peu en metres 0'2 m

- d) Ara escriu la longitud del peu en mil·límetres, indicant els càlculs en factors de conversió i el resultat final.

$$20 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} = 200 \text{ mm}$$

- e) Quina és la unitat més adequada per expressar la longitud del peu?

Els centímetres

Figura 3. Activitat per treballar els factors de conversió.

CÀLCUL DISTÀNCIA AL SOL

Nom equip:

STEAMPOUS 448

Noms alumnes:

PROJECTE ASTRONOMIA - 1r ESO

	DISTÀNCIA		Quins càlculs has de fer per passar de km a UA?		Distància expressada en UA		Quins càlculs has de fer per passar d'UA a cm?		cm que es representen en el paper
MERCURI – SOL	57.900.000 km								
VENUS – SOL	108.300.000 km								
TERRA – SOL	149.700.000 km	·	$\frac{1 \text{ UA}}{149.700.000 \text{ km}}$	=	1 UA	·		=	
MART – SOL	228.100.000 km								
JÚPITER – SOL	778.700.000 km								
SATURN – SOL	1.430.100.000 km								
URÀ – SOL	2.876.500.000 km								
NEPTÚ – SOL	4.506.600.000 km								

Figura 4. Activitat per calcular les distàncies en centímetres.

En aquesta activitat es treballa el concepte de marge d'error en relació amb els decimals. Els alumnes aprenen que l'error procedeix de la precisió de l'instrument de mesura, com la cinta mètrica, que només permet prendre mides fins a un cert grau de detall (per exemple, fins al mil·límetre o centímetre més proper). Això genera una discussió a l'aula sobre quants decimals incloure en el resultat i com aquest nombre és determinat per l'aparell que es fa servir.

Els estudiants reflexionen sobre l'impacte d'aquest marge d'error quan converteixen unitats (per exemple, de centímetres a quilòmetres), on petites variacions en els decimals poden modificar el resultat significativament. S'estableix que, tot i que hi poden haver múltiples respostes vàlides, l'error s'ha de considerar i justificar, entenent que la precisió dels decimals és condicionada per l'instrument, no només pel càlcul. Finalment, el docent valida les respostes tenint en compte aquests factors.

Per a la construcció de la maqueta han de calcular a escala la distància al Sol de cada planeta, i per guiar l'alumnat en aquests càlculs se'ls demana que facin

l'activitat de la figura 4, on calculen la distància en centímetres al Sol de cada planeta aplicant l'escala indicada. Primer passen els km a UA i seguidament s'indica que 1 UA serà 15 cm al paper.

Seguidament comencen a construir la maqueta a escala sobre paper *kraft*, d'uns cinc metres de longitud, de tots els planetes del sistema solar, marcant els punts on es col·locarà cada planeta.

CÀLCUL DE LA MIDA DELS PLANETES

Nom equip:

STEAMPOUS INE

Noms alumnes:

PROJECTE ASTRONOMIA - 1r ESO

PLANETES	RADI (KM)		Càlculs per passar a cm REALS (factors de conversió)		RADI (cm)		Càlculs per passar a cm MAQUETA (factors de conversió, aplicant l'escala)		RADI cm maqueta		Diàmetre cm maqueta
Mercuri	2.439,7	*		=		*		=		=	
Venus	6.051,8	*		=		*		=		=	
Terra	6.371	*		=		*		=		=	
Mart	3.389,5	*		=		*		=		=	
Júpiter	69.911	*		=		*		=		=	
Saturn	58.232	*		=		*		=		=	
Urà	25.362	*		=		*		=		=	
Neptú	24.622	*		=		*		=		=	

Figura 5. Activitat per calcular el radi i el diàmetre en centímetres de cada planeta.

L'activitat de la figura 5 es fa per guiar els estudiants a l'hora de calcular de quants centímetres serà el radi, o diàmetre, de cada planeta, a partir dels radis expressats en quilòmetres, aplicant l'escala indicada pel professorat.

Finalment construeixen, utilitzant el compàs i les tisores, els planetes en 2D, per anar-los col·locant sobre el paper *kraft*.

Amb aquesta maqueta l'alumnat visualitza i pren consciència de les distàncies entre planetes i el seus radis.

El professorat va optar per utilitzar dues escales diferents per a la representació del sistema solar a la maqueta, una per a les distàncies entre els planetes i una altra per als radis planetaris. Aquesta decisió es va prendre perquè, si s'utilitzés la mateixa escala per als dos elements, les proporcions serien impracticables. Els planetes serien massa petits per ser visibles sense una lupa, o bé la maqueta hauria de ser d'unes dimensions desmesurades per incloure tant les distàncies com els radis de manera proporcional. Així, l'ús d'escales diferents permet que els alumnes visualitzin tant les enormes distàncies entre els planetes com les seves dimensions, sense perdre la comprensió de les proporcions reals.

Amb aquesta activitat final s'ha treballat la competència matemàtica CE1,³ ja que s'elabora una representació matemàtica eficaç, amb recursos manipulables que condueixen a la com-

3. Competència específica matemàtica 1: Interpretar, modelitzar i resoldre situacions de la vida quotidiana pròpies de les matemàtiques i d'altres àmbits del coneixement aplicant diferents estratègies i formes de raonament per explorar procediments i obtenir solucions.

prensió de situacions de la vida quotidiana, com és el cas d'establir la distància entre els planetes del sistema solar i les mides que els corresponen.

Cal destacar que el sistema planetari és una representació en 3D, però quan es fa l'estudi, les longituds dels radis es poden visualitzar en 2D. Les mesures amb regles permeten treballar en una dimensió. La riquesa d'aquest enfocament és que amb dues magnituds d'una sola dimensió es pot modelitzar una realitat tridimensional. A més, el diàmetre, que generalment és considerat una mesura secundària, es converteix en la mesura principal en lloc del radi.

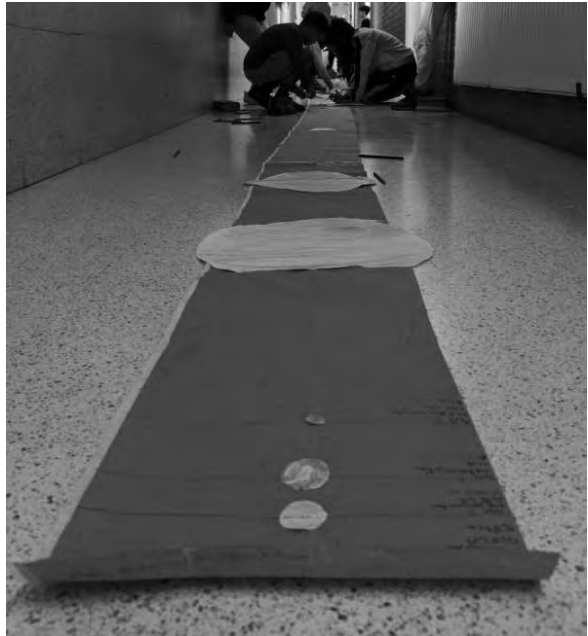


Figura 6. Fotografies del procés.

Per tancar l'activitat es col·loquen totes les maquetes de costat, i es comenten els punts forts i detalls a millorar. L'alumnat mateix és qui fa les reflexions i pren consciència si algun planeta queda desplaçat dels planetes dels companys, com s'observa en la foto de la figura 7.



Figura 7. Fotografia de les diferents maquetes.

Per acabar l'activitat, l'alumnat revisa les maquetes i selecciona la que consideren més ben elaborada de cada classe. Aquesta decisió es pren de manera consensuada, tenint en compte la precisió dels càlculs, la col·locació correcta dels planetes i la cura en la presentació visual. La maqueta escollida es penja a la paret de cada classe com a reconeixement del treball ben fet, i també perquè serveixi com a referència per a futurs projectes i discussions a l'aula.

3. Conclusions

El projecte **Viatge interplanetari** ha demostrat ser una experiència educativa enriquidora i motivadora per a l'alumnat. A través de la construcció de maquetes a escala del sistema solar i d'una base a Mart, els estudiants han adquirit una comprensió profunda dels conceptes d'escala, proporció i factors de conversió, així com de les característiques i les condicions dels diferents planetes.

Aquest projecte ha fomentat el pensament crític i la resolució de problemes, i ha impulsat els alumnes a aplicar els seus coneixements teòrics a situacions pràctiques. La integració interdisciplinària de STEAM ha proporcionat un context realista i aplicat per a l'aprenentatge tot facilitant la comprensió de la interconnexió entre aquestes disciplines.

Pel que fa a les matemàtiques, que sovint suposen un repte per a molts alumnes, el projecte ha ofert oportunitats de treballar aquests conceptes d'una manera pràctica i aplicada. Tot i així, alguns alumnes han trobat dificultats amb els conceptes d'escala i proporció, i també amb els factors de conversió. Aquestes dificultats han posat de manifest la necessitat de proporcionar més suport individualitzat i recursos didàctics per ajudar-los a superar aquests entrebancs i consolidar els seus coneixements matemàtics.

Tot i que el treball col·laboratiu ha estat clau per al projecte, s'han trobat diversos entrebancs. Alguns alumnes han tingut dificultats per treballar en grup, generant tensions i conflictes, i d'altres no han participat prou activament. Això ha evidenciat la necessitat de reforçar les habilitats de treball en equip, de gestionar els conflictes i d'assegurar una participació equitativa de tots els membres del grup.

4. Valoració final

El projecte **Viatge interplanetari** ha estat una experiència molt positiva tant per a l'alumnat com per al professorat. La col·laboració entre docents de diferents disciplines ha enriquit el procés d'aprenentatge amb una visió global i pràctica del treball. Cada professor ha aportat la seva experiència en el seu àmbit, i això ha permès donar una resposta més completa i personalitzada a les necessitats dels alumnes.

Tot i que la coordinació entre professors i la gestió del temps han suposat un repte, els beneficis del treball en equip han superat les dificultats. Aquesta experiència ha demostrat que els projectes interdisciplinaris no només potencien l'aprenentatge dels alumnes, sinó que també promouen el creixement professional dels docents. Animem el professorat a endinsar-se en projectes interdisciplinaris com aquest, ja que ofereixen un context d'aprenentatge motivador i pràctic per a l'alumnat, alhora que permeten crear una xarxa de suport entre els professors que facilita la seva tasca educativa i la fa més gratificant.

Bibliografia

- [1] Avilés, J. A. B. i Deeg, H. J. (2004). «Escuela de Invierno sobre Planetas Extrasolares. IAC noticias». *Revista del Instituto de Astrofísica de Canarias*, (1), 4-7. https://www.iac.es/system/files/documents/2019-02/Winter_School_2004.pdf

.....

La pastisseria, la guerra de les galàxies i les matemàtiques

Jordi Arnau i Ballestar

Catedràtic jubilat d'Ensenyament Secundari
en l'especialitat de matemàtiques
jarnau12@xtec.cat

Resum

Tot i que moltes vegades no ens n'adonem, estem envoltats de matemàtiques. En podem detectar en els estris mecànics i electrònics que utilitzem habitualment; en les formes geomètriques que tenen alguns productes d'alimentació que consumim; en els efectes especials de les pel·lícules; etc. En aquest article el nostre objectiu és mostrar les matemàtiques presents en dos objectes que ens són plenament familiars: el producte de pastisseria conegut com a berlina i la famosa Estrella de la Mort de la saga de pel·lícules de *La guerra de les galàxies*. Concretament, ens centrarem a calcular-ne els volums utilitzant coneixements matemàtics a l'abast dels alumnes de segon de batxillerat científic. Al final de cada apartat suggerim activitats complementàries que permeten interconnectar diverses parts de les matemàtiques i així poder tenir una visió global d'aquesta ciència i no veure-la només com un conjunt de tècniques individuals sense cap mena de relació.

Abstract

Even though we are often not aware of it, mathematics is all around us. It can be found in many mechanical and electronic devices that we use daily, in the geometrical shape of some food products, in cinematic special effects, and so on. In this paper, our aim is to show some of the mathematics that can be found in a couple of familiar items, namely the pastry product known as a doughnut, and the famous Death Star from the Star Wars saga. We will focus on calculating their volume using a mathematical foundations well known by post-compulsory secondary school students (scientific branch). At the end of each section, some complementary activities are suggested as a way of interconnecting elements of the mathematics to give an overall view of this science, rather than just presenting a collection of unrelated technical skills.

1. Introducció

La manca de temps i la necessitat d'abastar tot un temari fa que sovint es treballi només la part mecànica de les matemàtiques i que se'n deixi de banda l'aplicació pràctica, és a dir, la resolució de problemes de la vida real com una aplicació dels coneixements matemàtics adquirits, el que s'anomena modelització. Aquesta mancança fa que els alumnes perdin de vista l'estreta relació que les matemàtiques tenen amb la realitat que els envolta i dona lloc, moltes vegades, a la pregunta «i per a què serveixen les matemàtiques?».

Fer que els alumnes entenguin la seva utilitat i la puguin experimentar de primera mà, per exemple sent capaços d'utilitzar les matemàtiques per modelitzar situacions quotidianes, pot ajudar a fer que deixin de ser considerades una matèria àrida, difícil i sense sentit i que se'n comenci a veure la bellesa.

El currículum de matemàtiques de segon de batxillerat científic i tecnològic inclou el càlcul de primitives i les seves aplicacions en el càlcul d'àrees i volums de revolució al voltant de l'eix d'abscisses. Aquest article proposa dos exercicis que poden ser un petit exemple de modelització matemàtica en el context del càlcul de primitives i en diverses aplicacions, uns exercicis que poden ser una bona cloenda d'aquest tema ja que s'utilitzen tots i cada un dels continguts desenvolupats.

2. Modelitzant el dònut

Una de les figures més conegudes dins de la geometria és el tor, una superfície de revolució generada per un cercle que gira al voltant d'un eix que li és coplanari.

En l'àmbit de la pastisseria tenim el seu equivalent en la berlina, el pastisset anomenat popularment dònut.

Quin és el volum d'un dònut?

Respondrem a aquesta pregunta calculant realment quin és el volum d'un tor i aplicant la fórmula obtinguda al cas del dònut.

Els tres elements que cal tenir en compte són:

1. L'eix de rotació, que com hem dit ha de ser un eix coplanari amb el cercle que gira al seu voltant per generar el tor.
2. El radi r de la circumferència central, que correspon al forat del mig (figura 1).
3. El radi R de la circumferència que gira al voltant de l'eix de rotació que és coplanari amb ella (figura 2).

Escollim com a eix de rotació l'eix OX i com a centre de la circumferència de radi R el punt que té per coordenades $(0, R + r)$. D'aquesta manera podem calcular el volum del tor si fem girar al voltant de l'eix OX la circumferència de radi R , centrada en el punt $C = (0, R + r)$ i a l'interval $[-R, R]$.¹

1. Es poden escollir altres sistemes de referència. Deixem al lector la possibilitat d'explorar altres opcions.



Figura 1

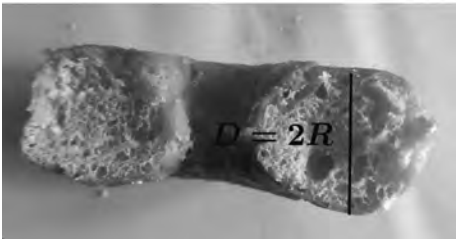


Figura 2

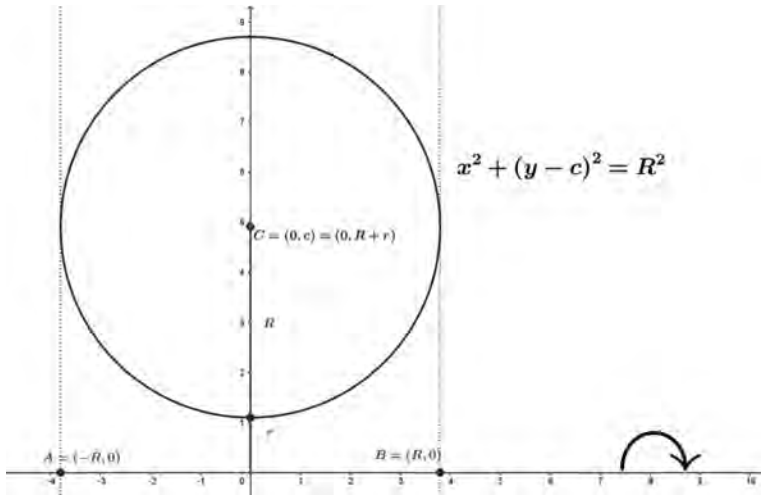


Figura 3

Si diem $c = R + r$, aquesta circumferència té per equació $x^2 + (y - c)^2 = R^2$.

Si aïllem la variable y de l'expressió anterior:

$$y = c \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

D'on obtenim les dues funcions que determinen els punts d'aquesta circumferència:

$$y = c + \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{per als punts de la meitat superior}$$

$$y = c - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{per als punts de la meitat inferior}$$

El volum buscat el podem calcular restant el volum de revolució generat per la part superior de la circumferència (figura 4) i el volum de revolució generat per la part inferior d'aquesta (figura 5), tots dos a l'interval $[-R, R]$.

Part superior:

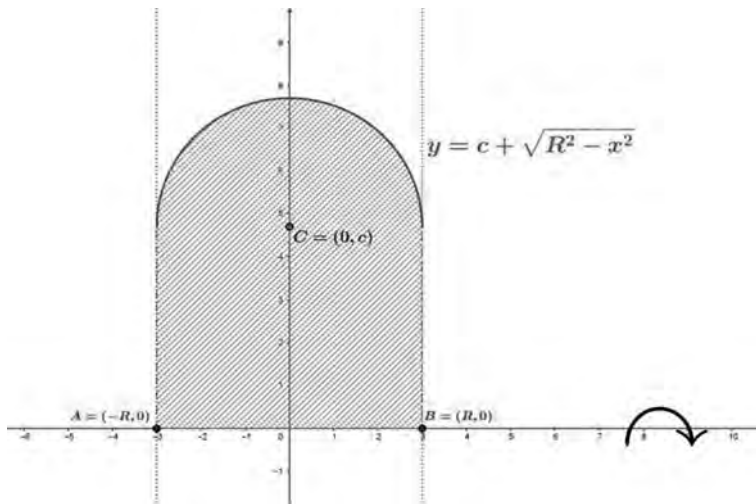


Figura 4

Part inferior:

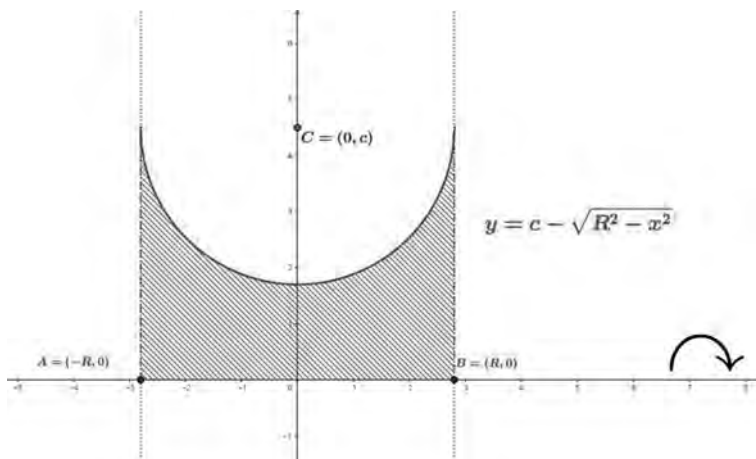


Figura 5

Si solapem gràficament les dues accions anteriors (figura 6) és clar que el resultat d'aquesta resta serà el volum de revolució generat per la circumferència de radi R i centre en el punt $(0, R + r)$ en girar al voltant de l'eix OX a l'interval $[-R, R]$.

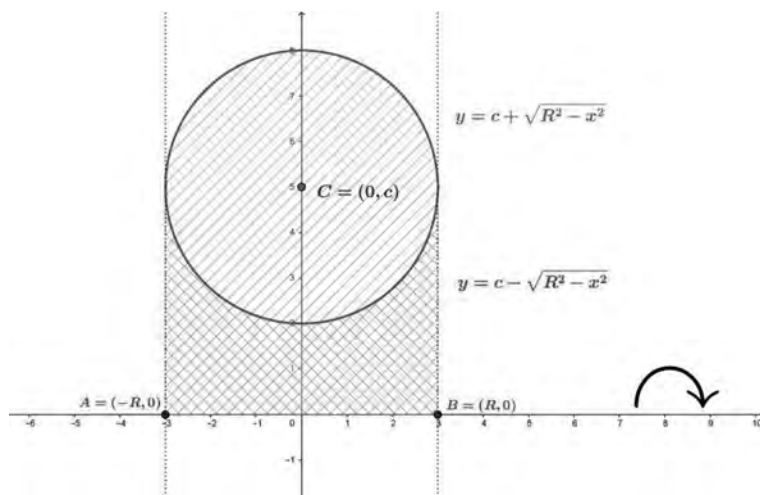


Figura 6

Així, la fórmula del volum buscat serà donada pel càlcul següent:

$$V = \pi \int_{-R}^R \left(c + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-R}^R \left(c - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx$$

I si tenim en compte la simetria del problema, és equivalent a:

$$V = 2\pi \int_0^R \left(c + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx - 2\pi \int_0^R \left(c - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx$$

Agrupant les dues integrals en una tenim:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^R \left[\left(c + \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 - \left(c - \sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 \right] dx = \\ &= 2\pi \int_0^R \left(c^2 + 2c\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 - x^2 - c^2 + 2c\sqrt{R^2 - x^2} - R^2 + x^2 \right) dx = \\ &= 8\pi c \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

Aquesta última integral la resoldrem fent el canvi trigonomètric:

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin t \\ dx = R \cdot \cos t dt \end{cases}$$

Essent els nous extrems d'integració:

$$\begin{cases} x = R = R \cdot \sin t \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 = R \cdot \sin t \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

Amb la qual cosa:

$$V = 8\pi c \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t \, dt = 8R^2 \pi c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + \cos 2t}{2} \right] dt = 4\pi R^2 c \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 R^2 c$$

Així doncs, tenint en compte que $c = R + r$, el volum del dònut modelitzat pel tor és:

$$V = 2\pi^2 R^2 (R + r) \quad \text{unitats cúbiques}$$

3. Suggeriments i reflexions finals

Primer de tot, es pot preguntar als alumnes si un dònut és realment un tor, d'aquesta manera se'ls pots fer entendre la diferència que hi ha entre model matemàtic i realitat.

La principal dificultat que poden tenir els estudiants per resoldre aquest problema és com començar a plantejar-lo de manera que la seva resolució sigui al més senzilla possible, és a dir, com escollir uns eixos de coordenades on poder situar, de la millor manera possible, l'eix de rotació i la circumferència a partir de la qual, i per rotació al voltant d'aquest eix, es genera el tor.

Altres dificultats poden ser la resolució d'algunes de les integrals que es presenten en el procés del càlcul del volum, ja que pressuposen uns coneixements sobre canvis de variable i de resolució d'integrals trigonomètriques molt específics. Cal fer especial atenció a com el canvi de variable modifica els extrems d'integració.

Com a aplicació pràctica del model matemàtic desenvolupat, es poden repartir uns quants dònuts entre els estudiants per tal que prenguin les mesures necessàries (aconsellable mesurar els dos diàmetres per després obtenir els radis) per calcular el seu volum i, a partir d'aquestes dades, fer un petit estudi estadístic. Aquest estudi el podem organitzar en dues parts:

1. Comprovar si hi ha correlació lineal entre els dos radis R i r .
2. Dificilment hi haurà dos volums iguals (es pot reflexionar amb els alumnes per què passarà això) però és ben cert que, per raons de control de qualitat, el producte ha de tenir una forma i un volum semblant en totes les unitats i, en mitjana, aquest volum hauria de ser proper a un valor teòric que és la mitjana poblacional. Pot ser interessant calcular, a partir de la mostra, un interval de confiança per a aquesta mitjana poblacional. Com que es tracta de mesures, podem suposar que les dades provenen totes d'una població que segueix una llei Normal.

Recordem que un interval de confiança d'un paràmetre poblacional és un interval numèric construït a partir d'una mostra, el qual conté el valor real d'aquest paràmetre amb una probabilitat que anomenem nivell de confiança.

Per fer aquest estudi cal treballar amb productes que siguin del mateix tipus i de la mateixa marca comercial. Amb l'experiència de mesures fetes pels alumnes a l'aula, una possible mostra de les dades obtingudes és:

r	0,55	0,65	0,6	0,65	0,55	0,6	0,55	0,65	0,55	0,6
R	1,4	1,5	1,45	1,45	1,35	1,4	1,45	1,5	1,45	1,4
V	75,44	95,49	85,08	87,15	68,35	77,38	83,01	95,49	83,01	77,38

On els radis de les circumferències són expressats en centímetres i els volums en centímetres cúbics.

Amb aquestes dades s'obté:

$$\begin{cases} \bar{X}_V = 82,78 \\ s_V = 0,97 \end{cases}$$

amb un coeficient de correlació entre r i R de $\rho_{rR} = 0,6287$.

El núvol de punts, amb la recta de regressió corresponent, és:

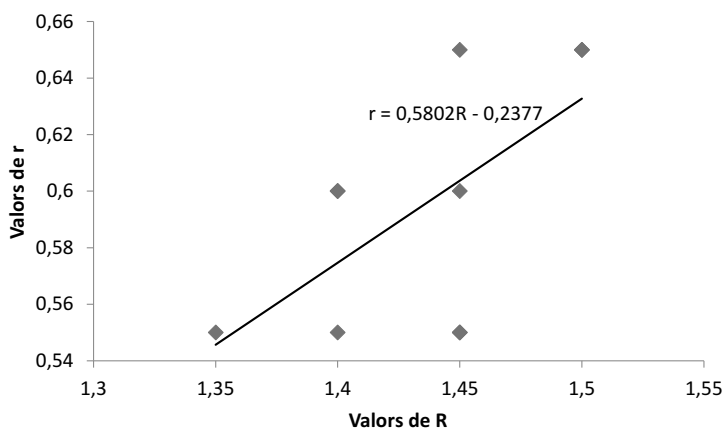


Figura 7

Es pot raonar amb els alumnes per què la correlació no és més alta mostrant les possibles fonts d'error: mesures preses amb poca precisió o cura, no deixen de ser productes industrials obtinguts a partir d'un motlle amb totes les imprecisions que això comporta; les circumferències no són circumferències perfectes...

Quant a l'interval de confiança per a la mitjana poblacional dels volums, el podem calcular amb un nivell de confiança del 95 %, és a dir, $1 - \alpha = 0,95$. Com que la mostra és petita (10 dades) haurem d'utilitzar la distribució t-Student amb $n - 1 = 9$ graus de llibertat:

$$IC_{1-\alpha} = \left[\bar{X}_V - t_\alpha \frac{s_V}{\sqrt{n}}, \bar{X}_V + t_\alpha \frac{s_V}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{amb} \quad t_\alpha = 2,2622$$

Si substituïm els diversos valors s'obté que l'interval de confiança per a la mitjana dels volums dels donuts, amb un nivell de confiança del 95 %, és:

$$IC_{0,95} = [82,086; 83,474]$$

Per acabar, i a partir d'aquests resultats, podríem estudiar quines haurien de ser les dimensions dels embolcalls d'aquests productes de pastisseria per tal de garantir que sempre els podrem empaquetar.

4. May the force be with you

Tots els fans de *La guerra de les galàxies* saben que l'Estrella de la mort és una arma de destrucció massiva, la destrucció de la qual és l'objectiu primordial de les forces rebels en alguns capítols de la saga.

La forma que té aquesta arma és la d'una esfera de la qual s'ha eliminat un petit casquet esfèric pertanyent a una altra esfera de radi molt més petit, formant així un orifici que és per on l'Estrella de la mort dispara el seu raig destructor (figura 8).



Figura 8

Quin és el volum de l'Estrella de la mort?

En aquest cas els elements que cal tenir en compte són:

1. El radi R de l'esfera gran.
2. El radi r de l'esfera petita de la qual es treu el casquet esfèric.
3. Que les dues esferes han de ser secants.

Per simplificar el problema, podem suposar que l'esfera de radi R es pot generar fent girar al voltant de l'eix OX una circumferència del mateix radi i centrada a l'origen de coordenades $O = (0, 0)$, i que l'esfera de radi r es pot generar fent girar al voltant de l'eix OX una circumferència del mateix radi i centrada en el punt $C = (a, 0)$ on a és la distància entre els centres de les dues circumferències.

El valor del paràmetre a no pot ser qualsevol, ja que com que les dues esferes han de ser secants s'ha de complir:

$$R - r < a < R + r, \quad \text{amb} \quad r < R$$

Les equacions de les respectives circumferències són:

$$C_1 : x^2 + y^2 = R^2$$

$$C_2 : (x - a)^2 + y^2 = r^2$$

Gràficament:

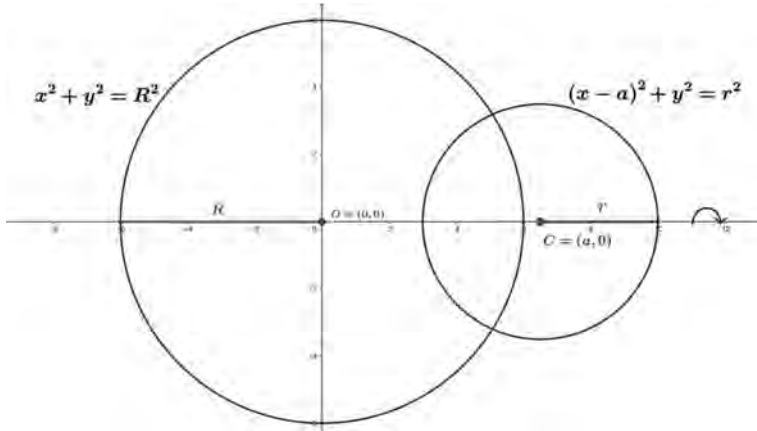


Figura 9

El volum V que estem buscant s'obté si restem del volum V_1 , corresponent a l'esfera de radi R , el volum V_2 generat en girar la intersecció de les dues circumferències al voltant de l'eix OX .

La primera part d'aquesta intersecció és determinada per un arc de la circumferència $C_2 : (x - a)^2 + y^2 = r^2$ i la segona part per un arc de la circumferència $C_1 : x^2 + y^2 = R^2$.

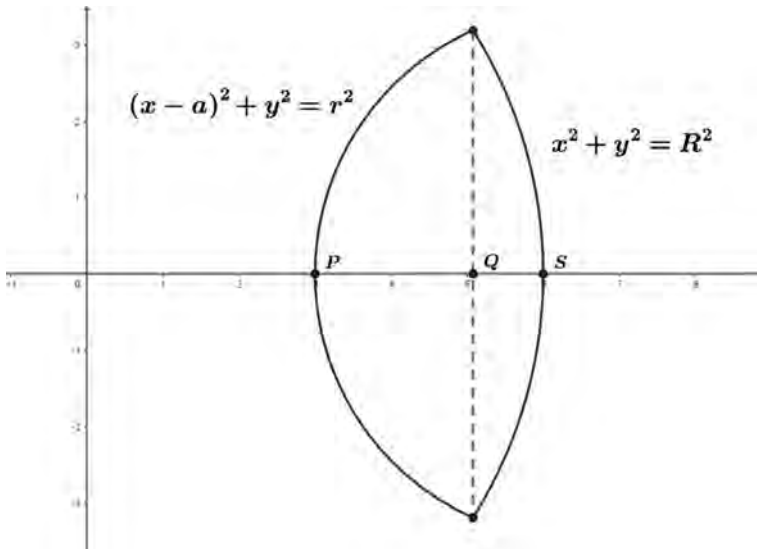


Figura 10

Per tant caldrà calcular el volum V_2 en dues parts, la primera essent el volum obtingut per la rotació de la part positiva del primer arc entre les abscisses dels punts P i Q , i la segona el volum obtingut per la rotació de la part positiva del segon arc entre les abscisses dels punts Q i S . Aquestes parts positives són, respectivament, les funcions:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= +\sqrt{r^2 - (x - a)^2} \\ f_2(x) &= +\sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}$$

Necessitem calcular les abscisses dels tres punts P , Q i S .

L'abscissa del punt $P = C_2 \cap \overline{OX}$

$$\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = r^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = a \pm r$$

L'abscissa corresponent al punt P és $x_P = a - r$.

L'abscissa del punt $Q = C_1 \cap C_2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ (x - a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow x_Q = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}$$

L'abscissa del punt $S = C_1 \cap \overline{OX}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \pm R$$

L'abscissa del punt S és $x_S = R$.

Així doncs el volum de l'Estrella de la mort serà:

$$V = V_1 - V_2$$

$$\text{Amb } V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ i } V_2 = \pi \int_{x_P}^{x_Q} (f_1(x))^2 dx + \pi \int_{x_Q}^{x_S} (f_2(x))^2 dx = \pi (I_1 + I_2).$$

Per facilitar els càlculs anomenem $K = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}$; amb la qual cosa, si desenvolupem l'expressió anterior, obtenim:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{a-r}^{\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}} (r^2 - (x - a)^2) dx = \int_{a-r}^K (-x^2 + 2ax + r^2 - a^2) dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + ax^2 + (r^2 - a^2)x \right]_{a-r}^K = -\frac{K^3}{3} + aK^2 + (r^2 - a^2)K + \frac{(a-r)^3}{3} + r(a-r)^2 \\ I_2 &= \int_{\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}}^R (R^2 - x^2) dx = \int_K^R (R^2 - x^2) dx = \left[R^2x - \frac{x^3}{3} \right]_K^R = \frac{2R^3}{3} - R^2K + \frac{K^3}{3} \end{aligned}$$

Per tant:

$$I_1 + I_2 = aK^2 - (R^2 - r^2 + a^2)K + \frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3}$$

Recordem que $K = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a}$

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= a \left(\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a} \right)^2 - (R^2 - r^2 + a^2) \left(\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2a} \right) + \frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} = \\ &= \frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} - \frac{(R^2 - r^2 + a^2)^2}{4a} \end{aligned}$$

Així doncs:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi \left[\frac{2R^3}{3} + \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} - \frac{(R^2 - r^2 + a^2)^2}{4a} \right]$$

És a dir, el volum de l'Estrella de la mort serà:

$$V = \pi \left[\frac{2R^3}{3} - \frac{(a-r)^2(a+2r)}{3} + \frac{(R^2 - r^2 + a^2)^2}{4a} \right] \text{ unitats de volum}$$

5. Suggestiments i reflexions finals

Com en el problema del dònut, la primera de les dificultats amb què es trobaran els alumnes en intentar resoldre aquest problema és el seu plantejament inicial, és a dir, com posicionar les dues circumferències en uns eixos de coordenades de manera que els paràmetres R , r , a siguin fàcilment controlables.

La dificultat principal, però, la poden trobar en la quantitat i la complexitat dels càlculs (llargs i feixucs) un cop les integrals ja s'han resolt. Per acabar el problema no n'hi ha prou amb aplicar Barrow, cal una mica de càlcul algebraic per trobar la fórmula simplificada del volum. Si es considera que és una tasca complicada per als estudiants, se'ls pot donar la resposta final i deixar el desenvolupament dels càlculs com una activitat fora de l'aula; o bé es pot plantejar que obtinguin la solució amb diferents tipus de programari, generant així *outputs* diferents que permeten realitzar igualment un treball de manipulació algebraica per arribar a la conclusió que totes les expressions són equivalents.

Per utilitzar aquest model es pot demanar als alumnes que proposin diversos valors per als paràmetres R , r i a amb $R - r < a < R + r$, observin quin aspecte té l'Estrella de la mort amb aquests valors i en calculin el volum corresponent. També es pot observar quin tipus d'Estrella de la mort s'obté si el valor de a és de valors propers als extrems $R - r$ i $R + r$.

Concretament, si $a = R + r$ o bé $a = R - r$ podem comprovar que no hi hauria Estrella de la mort: les dues circumferències serien tangents exteriors en el primer cas (figura 11) i tangents interiors en el segon (figura 12).

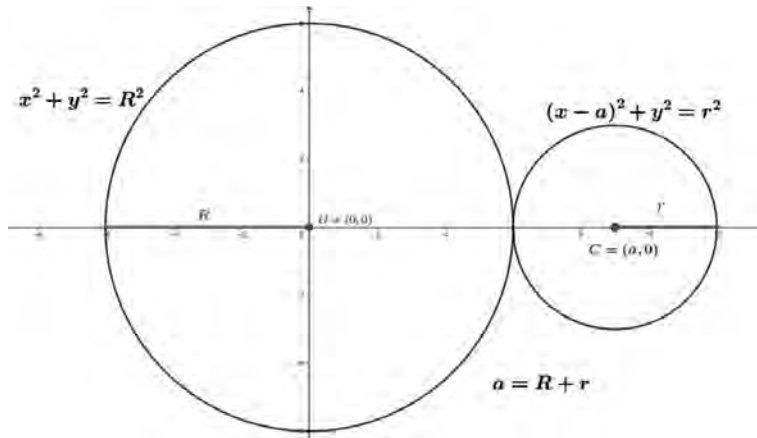


Figura 11

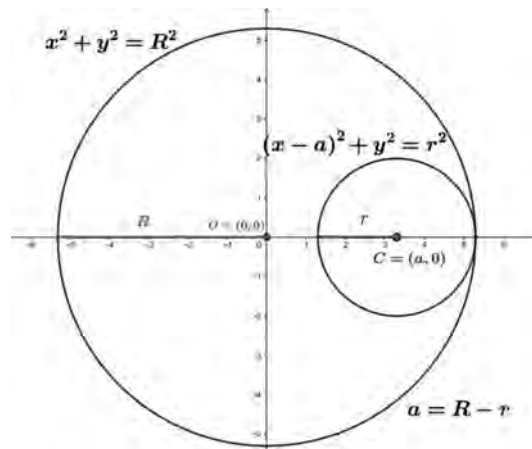


Figura 12

Com a aplicació complementària, pot ser molt interessant fer una petita immersió en la geometria relacionant els diversos valors que poden adoptar els paràmetres R , r i a amb la posició relativa de dues circumferències.

Ja hem vist què passa en els casos $R - r < a < R + r$: les circumferències són secants; $a = R - r$: les circumferències són tangents interiors; i $a = R + r$: les circumferències són tangents exteriors.

Falta saber quan les circumferències són interiors (figura 13), quan les circumferències són exteriors (figura 14) i quan les circumferències són concèntriques (figura 15). En concret, cal estudiar les situacions següents:

$$a < R - r, \quad a > R + r \quad \text{i} \quad a = 0$$

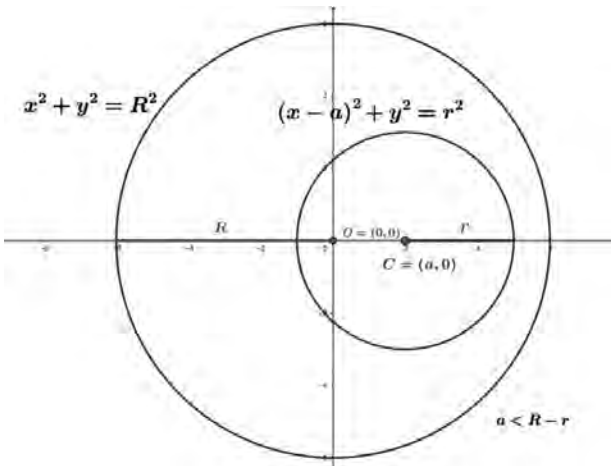


Figura 13

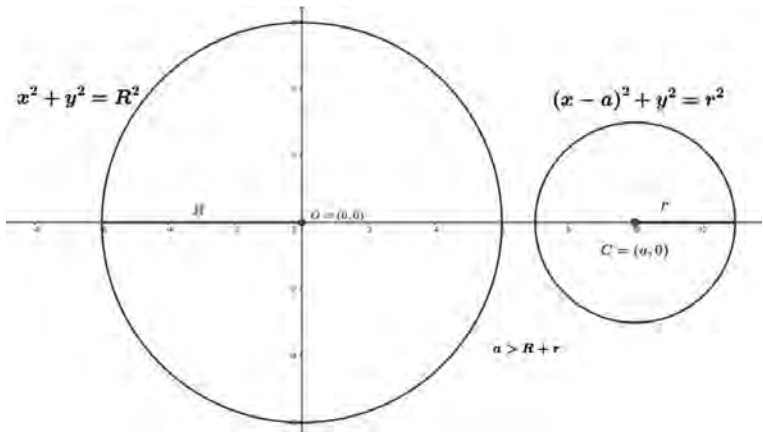


Figura 14

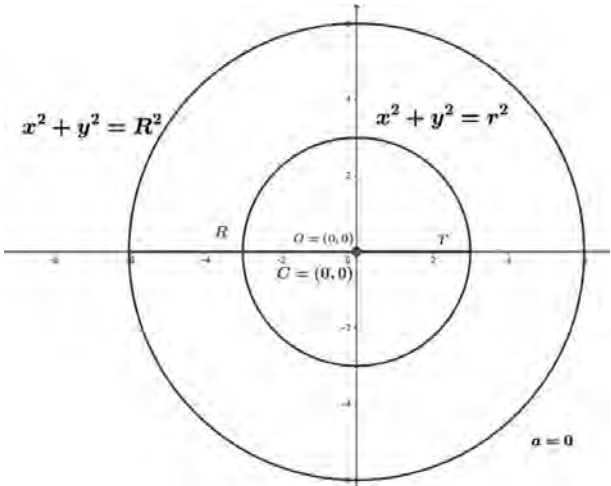


Figura 15

És possible visualitzar totes les possibles posicions relatives de dues circumferències utilitzant, per exemple, el programa GeoGebra.

Les activitats plantejades en l'article permeten mostrar les matemàtiques com un tot i no com un conjunt de parts sense cap mena de relació entre elles, com normalment les entenen els estudiants. És molt enriquidor veure que en el procés d'anàlisi d'un problema, i la seva resolució posterior, apareixen diferents àrees de les matemàtiques interconnectades, que en aquest cas concret són: anàlisi, àlgebra i geometria; totes imprescindibles de principi a final del problema estudiat.

.....

Les construccions geomètriques euclidianes. La papiroflèxia i les matemàtiques cartesianes¹

Josep Pla Carrera

Matemàtic i historiador

Resum

El meu renebot Xandre em va demanar si li podia explicar quina és la matemàtica que hi ha en la papiroflèxia. Li vaig respondre amb aquestes pàgines, que publica el *Nou Biaix* en dues parts: «Les construccions geomètriques euclidianes» i «La papiroflèxia i les matemàtiques cartesianes».

Abstract

My nephew-grandson asked me to explain to him the mathematics behind origami. I answered him with these pages that Nou Biaix has decided to publish in two parts: «Euclidian geometric constructions» and «Origami and Cartesian mathematics».

1. La geometria euclidiana del regle i el compàs

1.1. El regle i el compàs

Comencem pel començament. Per què el regle i el compàs?

1.1.1. L'escola de Plató

El segle IV aC, Plató (427 aC-347 aC)² —potser fora millor dir l'Escola platònica— va fixar que les úniques eines que es poden acceptar en la construcció geomètrica són el regle [R] i el compàs

1. Començat a Barcelona el 29 d'octubre de 2023.

2. Si bé el seu nom era «fill d'Aristó» Ἀριστοκλῆς, se'l coneix com a Πλάτων. Per a una biografia dels autors esmentats, vegeu [M_T MacTutor:1994-2023].

[C] —és a dir, els *ginys* que poden concórrer en la construcció són les *rectes* i les *circumferències*.³

1.1.1a. Això, què significa Significa que els únics punts que s'admeten són els que s'obtenen tallant *dues rectes, una recta i una circumferència o dues circumferències*.

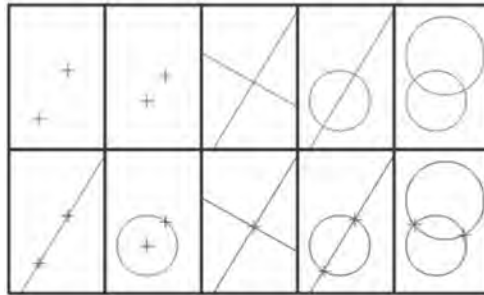


Figura 1. Construccions bàsiques amb regla i compàs.

És a dir, en cada construcció s'obté un punt nou que esdevé un punt acceptat en aquesta construcció i en les posteriors.

De retruc, ho són les rectes que passen per dos d'aquests punts i les circumferències amb el centre en un dels punts i que passen per l'altre.

En la figura 1, hi ha, de fet, dues menes de figures:

- En les dues primeres caselles superiors de l'esquerra veiem dos punts i, en les corresponents de sota, la recta —i també el segment— i la circumferència que aquests dos punts determinen.
- En les tres superiors de la dreta, hi ha dues rectes, una recta i una circumferència, i dues circumferències. Les de sota marquen els punts que aquests objectes determinen, en tallar-se.

1.1.1b. Com procedim? Per començar, necessitem almenys dos punts. S'accepta l'*existència d'un segment unitat*, és a dir, dos punts que en són els extrems: $\overset{0}{\text{I}} \text{---} \overset{1}{\text{I}}$. A partir d'ells, es generen més i més punts: $O, I, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$

Exemple 1. Volem construir un quadrat de costat OI .

Per fer-ho, a) Hem de *construir* dos punts P_3 i P_4 de manera que els segments d'extrems I i P_3 , O i P_4 , i P_3 i P_4 siguin els costats del quadrat.

b) Cal *demonstrar* que el que hem construït és el que volíem. És a dir, que el polígon $\square OIP_3P_4$ de vèrtexs O, I, P_3 i P_4 és efectivament un quadrat.

3. [Boyer:1949], nota 52, p. 27. [Pla:2016], p. 256.

Recordem la definició de quadrat:

Definició de quadrat. *Un quadrat és una figura limitada per quatre segments rectilinis iguals i perpendiculars dos a dos.*⁴ ♦⁵

Veiem els passos a), b) i c) que cal fer. La resta de passos són anàlegs.

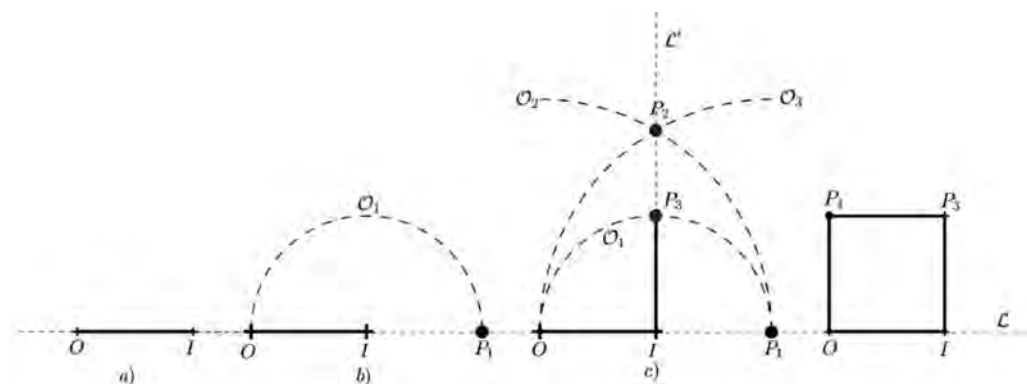


Figura 2. Construcció de quadrat de costat OI .

Pas 0) Tenim els punts O i I .

Pas a) Tirem la recta $\mathcal{L}$ que passa per O i I . [R]

El segment OI , d'extremes O i I , és el costat amb el qual volem construir el quadrat.

Pas b) Amb centre en I , fem la circumferència $\mathcal{O}_1$ que passa per O . [C]

Aquesta circumferència talla $\mathcal{L}$ pel punt P_1 , que s'ha generat de manera correcta. Per tant, hi podem treballar.

Pas c) Consta de tres subpassos:

Subpass c₁) Amb centre en O , tirem la circumferència $\mathcal{O}_2$ que passa per P_1 . [C]

Subpass c₂) I, amb centre en P_1 , la $\mathcal{O}_3$ que passa per O . [C]

Subpass c₁ i c₂) Les circumferències $\mathcal{O}_2$ i $\mathcal{O}_3$ es tallen pel punt P_2 ,⁶ construït correctament. Per tant, hi podem treballar.⁷

Subpass c₃) Tirem la recta $\mathcal{L}'$ que passa pels punts P_2 i I . [R]

Aquesta recta talla $\mathcal{O}_1$ pel punt P_3 , que és correcte i que, per tant, podem utilitzar.

Nota 1 Hem fet la **perpendicular** a un segment donat per un dels seus extrems.

I determina el darrer costat, d'extremes P_3 i I , del quadrat buscat.



4. [Pla:2018], D1 22, p. 80.

5. Aquest símbol indica el final d'una definició.

6. Sobre l'existència d'aquest punt, vegeu les notes 269 i 387 de [Pla:2018], p. 88 i 113.

7. Fixeu-vos que, en realitat, per determinar el punt P_2 només cal el compàs.

8. [Pla:2018], E1 46, p. 147-148.

Exercici 1. Feu els passos que falten per tal d'aconseguir els quatre costats del quadrat. [*Indicació.* El costat que surt del punt O és *mutatis mutandis* com el que acabem de fer: és la perpendicular a Ol pel punt O . El quart costat és molt més simple d'obtenir un cop tenim el punt P_4 . Només cal l'ús del regle.]

1.2. Els Elements d'Euclides

El segle III aC, Euclides (Εὐκλείδης)⁹ 325 aC-265 aC) va escriure els *Elements* (Στοιχεία), una de les obres matemàtiques cabdals de tots els temps.

1.2.1. L'axiomàtica euclidiana

En el tractat euclidià es fixà l'*axiomàtica* de la geometria grega d'acord amb les indicacions platòniques i la metodologia del raonament deductiu fixada per Aristòtil (Αριστοτέλης) (384 aC-322 aC).

L'autor hi estableix, abreujant, les *definicions* dels objectes geomètrics, les *nocions comunes* —o principis vàlids en ciència i filosofia—, i els *postulats* —allò que hem d'admetre, sense demostració, com a vertader en geometria.

En síntesi, els postulats d'Euclides els podem reduir a aquests tres:

Postulat de la recta. *Donats dos punts, existeix sempre una recta, i només una, que passa per tots dos.* És a dir, dos punts determinen una recta única

Postulat de la circumferència. *Donats dos punts, existeix sempre una circumferència, i només una, que en té un com a centre i que passa per l'altre.* És a dir, dos punts determinen una circumferència única.

Postulat de les paral·leles euclidià. *Donada una recta i un punt exterior a ella, sempre n'hi ha una altra que passa pel punt donat i és paral·lela a la donada —és a dir, que no la talla.*

La geometria que aplica aquests postulats s'anomena *geometria euclidiana*. És la que aprenem a l'escola i la que treballarem aquí.

La negació del postulat de les paral·leles comporta dues possibilitats:

Postulat el·líptic de les paral·leles. *Pel punt **no** és possible tirar cap recta paral·lela a la donada.* La geometria que aplica aquest postulat s'anomena *geometria el·líptica*.

Postulat hiperbòlic de les paral·leles. *Pel punt és possible tirar **més d'una** recta paral·lela a la donada [i fins i tot infinites].*

La geometria que aplica aquest postulat s'anomena *geometria hiperbòlica*.

I la geometria que no fa servir cap d'aquests tres postulats s'anomena *neutral*.

9. [M_T MacTutor:1994-2023]. Vegeu la nota 2 (pàgina 66). No ho tornarem a recordar.

1.2.2. Els problemes i els teoremes

Una altra qüestió important que Euclides recull als *Elements* és la distinció entre les proposicions: els *problemes* i els *teoremes*.

Un *problema* és una proposició que demana **construir** l'objecte geomètric.

Exemple de problema. *Construir un quadrat d'un costat donat.*

En un problema, com ja hem indicat abans, cal fer dues coses:

- a) De primer, *construir* l'objecte.
- b) Després, *demonstrar* que hem construït el que es demanava.

Així és com procedeix Euclides en els *Elements*. De les 465 proposicions, 98 són problemes, i la resta, teoremes.¹⁰

Un *teorema* és una proposició en la qual es demana **demonstrar** una propietat partint de la definició de l'objecte, les nocions comunes i els postulats.

Exemple de teorema. *La suma dels angles externs d'un triangle arbitrari és igual a quatre angles rectes.*¹¹

1.2.2a. Una qüestió epistemològica En el cas dels teoremes **no cal** que l'objecte que té la propietat s'hagi construït. És un objecte *ideal*.

L'exemple de teorema val per a l'heptàgon i l'enneàgon regulars (polígons regulars de 7 i 9 costats), que no es poden fer amb regla i compàs.

En el cas dels problemes, en canvi, **cal** construir l'objecte. És un objecte *real*, és a dir, **existeix**.

Euclides estableix l'existència dels polígons regulars de tres, quatre, cinc i quinze costats —diu com s'han de construir i demostra que els ha construït.

I, com que veu que és possible dimidiar un angle (2.1b, pàgina 89), també són construïbles tots els que s'obtenen doblant el nombre de costats d'un ja construït. És a dir, els de sis, vuit, deu, dotze, setze, vint, etc costats.

1.2.2b. Intervé Gauss Ens podem fer la pregunta següent:

Pregunta. *N'hi ha més, de polígons regulars construïbles amb regla i compàs?*

10. Hi ha una traducció catalana dels *Elements* d'Euclides, a [Pla:2018] i [Pla:2020]. En línia, en català, a https://web.archive.org/web/20130901142522/http://euclides.org/menu/elements_cat/indexeuclides.htm#Llibre%20I. La informació sobre els teoremes i els problemes la trobareu a [Pla:2018], §1.3, taules 1.2 i 1.3, p. 12-13.

11. Es basa en el teorema euclidià: «La suma dels angles interiors d'un triangle és igual a dos angles rectes». [Pla:2018], p. 12-13. En les geometries no euclidianes, la suma dels angles és més petita (hiperbòlica) o més gran (el·líptica) que dos angles rectes.

Passarien molts segles abans que un jove de divuit anys, Gauss, establís el seu teorema:

El polígon regular de disset costats és construïble amb regla i compàs.

I en la seva obra *Disquisitiones arithmeticae* (1801) demostra **que tots** els polígons regulars són construïbles amb regla i compàs.¹²

1.3. Variacions del regla i el compàs

Un cop hem acceptat que les eines geomètriques acceptables són el regla i el compàs, ens podem plantejar algunes preguntes:

Pregunta. *Podem fer les mateixes construccions geomètriques:*

1. *amb un compàs amb memòria que amb un sense memòria, i el regla?*
2. *amb un compàs rovellat que amb un de no rovellat, i el regla?*
3. *només amb un compàs?*
4. *només amb un regla?*

1.3.1. El regla i el compàs sense memòria

Definicions de compàs amb i sense memòria Un compàs té memòria si, quan aixequem un dels dos extrems del paper, no es tanca: recorda la darrera distància entre els dos punts. En canvi, no té memòria si, quan un dels dos extrems deixa de tocar el paper, es col·lapsa com si tingués una molla. ♦

Teorema. *Ambdós compassos són equivalents.*

*És a dir, amb l'ajut del regla, tant l'un com l'altre permeten fer les mateixes construccions.*¹³

Això és conseqüència de la proposició 2 del llibre primer dels *Elements*.

Proposició 2. *És possible transportar un segment donat amb un extrem en un punt també donat.*

Aquesta proposició s'estableix immediatament basant-se en la primera.¹⁴

Proposició 1. *És possible construir un triangle equilàter de costat donat.*

12. *Disquisitiones arithmeticae*. [Gauss:1801]. És un text complex, la comprensió del qual depèn d'uns bons coneixements previs. La secció I, que recull molts dels resultats d'aritmètica precedents, és molt clara i entenedora, i la seva lectura molt aconsellable. Disposem de la traducció catalana de G. Pascual. En aquest text, Carl Freidrich Gauss (1777-1855) estableix que el nombre N de costats d'un polígon construïble amb regla i compàs és de la forma $N := 2^m F_1 \cdots F_r$, on $m \geq 0$ i els F_k són primers, diferents, i de la forma $F_k := 2^{2^k} + 1$, amb $k \geq 0$. Aquests nombres, que es coneixen amb el nom de *nombres de Fermat*, els va introduir Pierre de Fermat (1607-1665) l'any 1640. Va conjecturar que tots ells eren primers, però l'any 1740 Leonhard Euler (1707-1783) va demostrar que F_5 és compost. Actualment, no sabem si per a $m > 5$, n'hi algun que sigui primer. La conjectura ara és que, per a $m \geq 5$, tots els F_m són compostos.

13. És evident que el compàs amb memòria té, en principi, més possibilitats que l'altre.

14. Cap de les dues depèn del postulat de les paral·leles. Són proposicions neutrals.

Euclides fa les dues construccions —la de la proposició 1 i la de la 2— amb un compàs sense memòria.¹⁵

1.3.1a. Transport d'un segment a un punt D'entrada, fixem-nos en el problema que proposa la proposició 2.

Problema. *Volem transportar un segment donat AB amb un extrem en un punt C també donat (figura 3).*

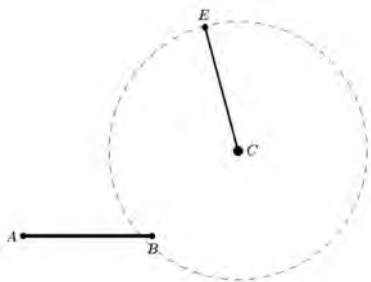


Figura 3. El transport d'un segment amb un compàs amb memòria.

1.3.1a₁. Amb el compàs amb memòria Si tenim un compàs amb memòria i volem portar el segment AB al punt C (figura 3), no tenim cap problema.

Construcció

- Punxem una punta en el punt A del compàs i l'obrim fins que l'altra cau damunt de B .
- Si l'aixequem, es manté obert en aquesta posició perquè té memòria.
- El portem al punt C . És a dir, punxem en el punt C i l'altra punta marca un punt E [en tota una circumferència de possibilitats].
- El segment CE serà igual al AB [ja que C té memòria]. ♠

La dificultat es presenta quan volem resoldre aquesta qüestió amb un compàs que no té memòria.

1.3.1a₂. Amb el compàs sense memòria La construcció és un pel més complicada. Vegem-ne els passos.¹⁶

Construcció

Pas 1. Unim un extrem del segment donat AB —per exemple el B — amb el punt C al qual volem portar AB (figura 4). [R]

Pas 2. Construïm el triangle equilàter de costat BC , $\triangle BGC$. [Com veurem, ho podem fer, per la proposició 1, amb un compàs sense memòria.]

15. Com que el compàs d'Euclides no té memòria, necessita establir la proposició 2.

16. [Pla:2018], p. 89-90.

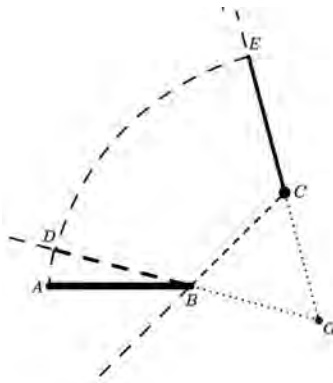


Figura 4. La proposició II dels *Elements* d'Euclides.

Pas 3. Tirem la recta que passa per G i per l'extrem B del segment AB que hem triat. [R]

Pas 4. Amb centre en B , fem la circumferència, d'arc $\widehat{AD}$, que passa pel punt A . [C]

Talla BD pel punt D [un punt vàlid].

Pas 5. Amb centre en G , tirem la circumferència que passa pel punt D , d'arc $\widehat{DE}$. [C]

Pas 6. Tirem la recta que passa per G i el donat C . [R]

Talla la circumferència per E [un punt vàlid].

El segment CE —que és igual a AB — té un extrem en el punt C . És a dir, és el segment buscat. ♣

Com sabem que el segment CE és igual al AB ?

Cal demostrar-ho basant-se en la naturalesa dels objectes, i això és el que estableixen les definicions i les proposicions ja establertes.

Definició de circumferència. És una corba tancada els punts de la qual equidisten amb un punt donat que s'anomena centre. Els segments que uneixen els seus punts amb el centre s'anomenen radis. És a dir, tots els radis són iguals. ♦¹⁷

Definició de triangle equilàter. Un triangle equilàter és una figura limitada per tres costats iguals. ♦¹⁸

Demostració

Pas 1 i 2. Els segments AB i BD , i GD i GE són dos radis de les circumferències d'arcs $\widehat{AD}$ i $\widehat{DE}$. Per tant, són iguals. [Definició de $\circ$]

Pas 3. Tenim que $GD = GB + BD$ i $GE = GC + CE$ i $GB = GC$ [Definició de $\triangle$ equilàter].

17. [Pla:2018], D120, p. 80.

18. [Pla:2018], D115 i 16, p. 79.

Pas 4. Si d'iguals traiem iguals, el que resta és igual al que resta.¹⁹

Pas 5. Per tant, els segments CE i BD són iguals.

Pas 6. Però dues coses iguals a una tercera són iguals entre si.²⁰

Tenim, doncs, que $AB = BD$ i $CE = BD$, i, per tant, $CE = AB$.



Proposició I. Ha quedat pendent veure que, amb un compàs desmemoriat, *podem fer un triangle equilàter de costat donat AB* (figura 5).

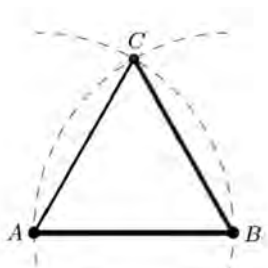


Figura 5. La proposició I.

Construcció

Pas 1 i 2. Amb centres en A i en B i radis AB i BA , tirem sengles circumferències. [C]

Es tallen pel punt C .²¹

Pas 3. Unim C amb A i amb B . [R]

El triangle $\triangle ACB$ és equilàter.



Com sabem que és equilàter? La resposta és fàcil.

Demostració

Per la definició de circumferència, $AC = AB$ i $BC = BA$, amb $AB = BA$ [és el mateix segment] i Nc 1 [nota 20].

És a dir, $AC = BC = AB$. El triangle és, doncs, equilàter.



Corol·lari. És possible dividir el segment AB .

Construcció

La recta CD (figura 5) dimidia el segment AB .



19. És un principi de raonament acceptat per Euclides: Nc 3. [Pla:2018], p. 85.

20. Pas 6 de la demostració anterior. [Pla:2018], Nc 1, p. 85.

21. Nota 6 (pàgina 68).

Exercici 2. Demostreu-ho.²²

Què passaria, però, si el compàs estigués rovellat i només admetés una obertura fix. És a dir, i si només admetia un radi?

1.3.2. El regle i el compàs rovellat

El segle x , el matemàtic i astrònom iraní Muhàmmad Abu-l-Wafà, conegut com Abu-l-Wafà, 940—~998) va escriure un obra força extensa en la qual va incloure un capítol *Sobre les parts de la geometria que podem fer amb un compàs rovellat*²³ en què donava resposta afirmativa a la pregunta:

Pregunta. *És possible fer les mateixes construccions amb un compàs rovellat i un regle?*

Curiosament, aquest problema fou tractat i estudiat també per altres matemàtics.²⁴ Al segle xix , el matemàtic suís Jakob Steiner (1796-1863) va publicar un llibret de geometria, *Les construccions geomètriques que podem fer amb un regle i un sol cercle*,²⁵ donant resposta a un suggeriment del matemàtic francès Jean-Victor Poncelet 1788-1867).

El problema d'Abu-l-Wafà es pot complicar una mica més. En lloc de disposar d'un compàs rovellat que permet fer circumferències d'un radi fix amb centres diversos, podem fer el mateix disposant d'una única circumferència, col·locada en un centre fix i inamovible però conegut?²⁶

1.3.2a. Tres construccions possibles²⁷**1.3.2a₁. La perpendicular a un segment per un extrem seu**

Problema 1. *Volem tirar una perpendicular per un extrem d'un segment donat AB.*

Analitzem dos casos:

- 1) Quan el compàs no té memòria i, de retruc, quan en té.
- 2) Quan el compàs està rovellat (figures 7 i 8).

22. Com hem vist, en les construccions amb el compàs sense memòria, en cada actuació, un cop fixat el centre i el punt pel qual passa la circumferència el compàs no s'aixeca. Ara bé, en actuacions diferents el compàs pot adoptar amplades —radis— diferents, que són determinades pel centre i el punt donats.

23. *Kitāb fi mā yahtāj ilayh al-ṣāni' min al-a'māl al-handasiyya*. Vegeu, en línia, <https://shs.hal.science/halshs-00645624>, que permet descarregar el document en pdf.

24. En línia a <https://shs.hal.science/halshs-00645624>, que permet descarregar el document en pdf.

25. *Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*. En línia a <https://books.google.es/books?id=kdl3AAAAMAAJ>.

26. [Martin:1998], capítol 6, p. 97-105. O bé, en línia: https://en.wikipedia.org/wiki/Poncelet%E2%80%93Steiner_theorem.

27. [Berggren:1986], p. 92-96. Mostra cinc construccions.

Exercici 3. Proveu que tot el que es pot fer amb un compàs sense memòria es pot fer amb un que sí que en té.

Cas 1. El compàs no té memòria o en té, és a dir, és lliure. Com hem indicat a la nota 2 (pàgina 66), això ho hem fet amb un compàs sense memòria. Pel que fa al compàs lliure, vegeu l'exercici 3.

Cas 2. El compàs està rovellat. Només admet una obertura (figures 6 i 7).

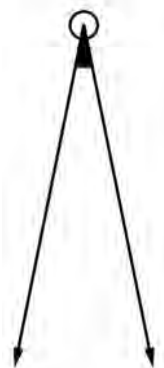


Figura 6. Compàs rovellat.

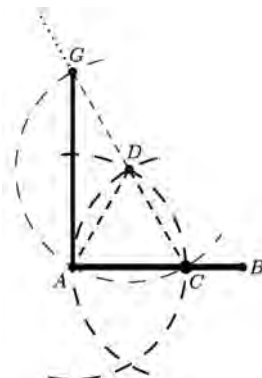


Figura 7. Ús del compàs rovellat.

Construcció

Pas 1. Tirem una circumferència que determina un punt C del segment AB [o de la seva prolongació]. [Compàs rovellat amb centre en A]

Pas 2. Tirem una circumferència que passa per A . [Compàs rovellat amb centre en C]

Es tallen pel punt D .

Pas 3. Tirem una circumferència que passa per A . [Compàs rovellat amb centre en D]

Pas 4. Tirem la recta que passa per C i D . [Regle]

Tallem la circumferència del pas 3 pel punt G .

Pas 5. Unim G i A . [Regle]

El segment GA és perpendicular al AB pel punt A , com volíem (figura 7). ♣

Exercici 4. a) Proveu que, en tots dos casos, hem aconseguit el que volíem, és a dir, el segment perpendicular GA . [Indicació. Els dos angles que el segment GA determina en la recta AB són iguals, segons la definició d'Euclides].²⁸

b) Val també la demostració, si el punt C cau en la prolongació del segment AB ?

c) Amb aquesta construcció, podem determinar el punt mitjà M de AB .

1.3.2a₂. Podem dimidiar un segment²⁹

Considerem un segment AB .

Problema. Ens proposem dimidiar-lo fent servir un compàs rovellat com el de la figura 8 (pàgina 77).

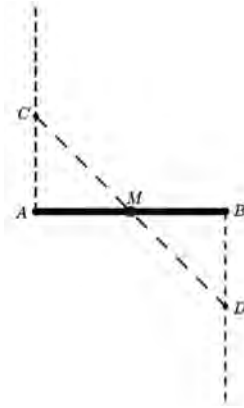


Figura 8. Dimidiam un segment amb un compàs rovellat.

Construcció

Pas 1. Pels punts A i B , aixequem les perpendiculars (figura 9). [1.3.2a₁]

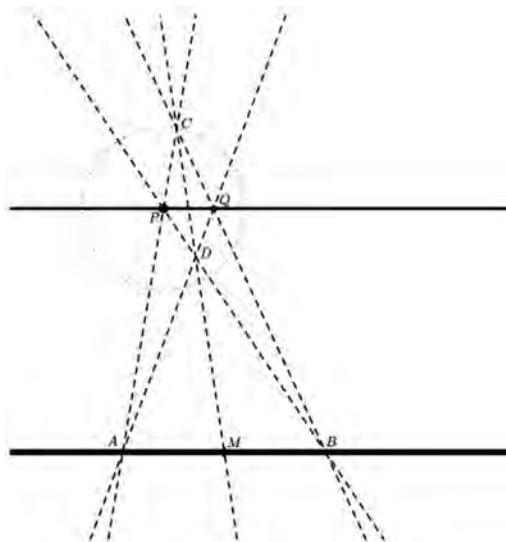


Figura 9. Recta paral·lela per un punt extern amb compàs rovellat.

Pas 2. Amb centre en els punts A i B , tirem les circumferències (No les hem dibuixat). [C rovellat]

29. En el corollari de la pàgina 74, hem vist que ho podem fer amb un compàs lliure.

Tallem les perpendiculars pels punts A i B per C i D , respectivament.

Pas 3. Unim els punts C i D . [Regle]

Tallem el segment AB pel punt M .

Aquest és el punt buscat.



Exercici 5. Proveu-ne la veracitat.

1.3.2a₃. La paral·lela a una recta per un punt exterior a ella.

Acabem aquest paràgraf *construint la recta paral·lela a una recta que passa per dos punts A i B per un punt exterior P a ella.*

Ho farem només amb un compàs rovellat.³⁰

Tenim una recta que passa pel punt A i B i un punt P exterior a ella.

Volem tirar una recta paral·lela a la recta AB pel punt P (figura 10).

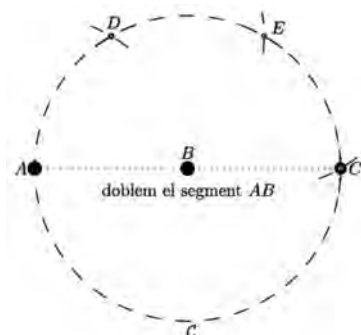


Figura 10. Doblar un segment.

Construcció

Pas 1. Unim els punts de la recta AB amb el punt P . [R]

Pas 2. Triem un punt C de la recta AP .

[C rovellat amb centre en P]

Pas 3 i 4. Tirem les rectes BC i la que passa pel punt C i el punt mitjà M de AB .

[R i exercici 4c]

Aquesta segona talla la recta BP pel punt D .

Pas 5. Tirem la recta AD . [R]

Talla la BC pel punt Q .

30. [Pla:2018], El 31, p. 128.

Pas 6. Tirem la recta PQ . [R]

És la recta paral·lela buscada.



Exercici 6. Proveu que la recta PQ és paral·lela a la AB . [Indicació. Apliqueu la definició de recta paral·lela.³¹]

Nota 2. Segons el geòmetra Francesco Severi (1879-1961), n'hi ha prou amb un arc de circumferència de centre conegut i el regle.

1.4. El compàs sol [sense memòria]

El segle XVII, el matemàtic danès Georg Mohr (1640-1697) va escriure *Euclides danicus* (Amsterdam, 1672), un text en què demostrava que totes les construccions dels *Elements* d'Euclides que es poden fer amb regle i compàs, també es poden fer només amb compàs. Malauradament, aquest petit opuscle va passar desapercebut fins al segle XIX quan fou redescobert pel matemàtic italià Lorenzo Mascheroni (1750-1800) que el va publicar en l'obra *Geometria del Compasso* (Pavia, 1797). Per aquesta raó, el resultat es coneix com el *teorema de Mohr-Mascheroni*.

En aquesta construcció tots els punts, que en les altres construccions s'obtenien tallant dues rectes o una recta i una circumferència, s'han d'obtenir tallant dues circumferències, perquè, en no disposar de regle, no podem tirar rectes.³²

Per tal de copsar, com en els casos anteriors, com funciona aquesta tècnica presentem algunes construccions.

D'entrada, cal que parem esment que ara un segment queda determinat pels seus extrems. El segment no hi és perquè no tenim regle.³³

1.4.1. La duplicació d'un segment donat

Problema. Donats els punts A i B —de fet, el segment AB —, volem determinar un segment AC exactament igual al doble de AB .³⁴

Tenim dos punts A i B .

Utilitzant només el compàs, volem determinar un punt C de manera que (el A i C sigui el doble de(l) A i B .

31. [Pla:2018], D11, p. 78.

32. En podem veure una introducció senzilla a [Courant i Robbins:1941], p. 154-158, i completa a [Martin:1998], p. 53-68.

33. Nosaltres, però, dibuixarem un línia molt subtil de punts que, de fet, no hi és, perquè ajuda a la imaginació basada en el costum. Els punts donats els representem amb ● grossos; els punts que ens disposem a construir amb ○, petits, i el que volem trobar perquè determina el segment que busquem amb un ○ més gran.

34. Amb compàs sol, només coneixem els extrems A i B del segment, que designarem AB , i recordem que els altres punts del segment, si no s'han construït amb compàs sol, no hi són.

Exercici 7. a) Vegeu la figura 10 i proveu que [el segment] A i C fa el doble que [el] A i B . [Indicació. És fàcil. Cal fer els vèrtexs de mig hexàgon regular inscrit en el cercle de centre B que passa per A [o a l'inrevés] i considerar C .]

b) Proveu que, si podem fer el segment $AC = 2AB = AB + AB$, també podem fer el $AD = AB + \overset{n)}{\dots} + AB$, on n és un nombre natural.

1.4.2. El punt simètric d'un punt respecte d'un segment donat

Problema. Donats un segment d'extrems A i B i un punt arbitrari P , volem determinar el punt Q , simètric del punt P respecte de la recta AB .³⁵

Construcció

Pas 1 i 2. Amb centres A i B , tirem les circumferències que passen per P . [C]

Es tallen en Q , el simètric de P respecte de AB .

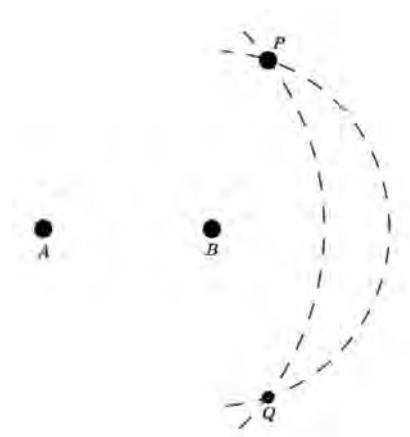


Figura 11. Simètric d'un punt P respecte d'una recta AB .

Exercici 8. Proveu-ho.

1.4.3. El punt mitjà d'un segment

Problema. Volem determinar el punt mitjà M del segment d'extrems A i B .

- a) Si disposem de regla i compàs, és un problema que es resol immediatament. b) Si no disposem de regla, les coses es compliquen, perquè no podem tirar els segments d'extrems A i B , i C i D .

35. La figura 5 (pàgina 74) suggereix la manera de fer-ho. Per anar-nos-hi acostumant, en certes ocasions no dibuixarem els segments rectilinis ja que no tenim regla.

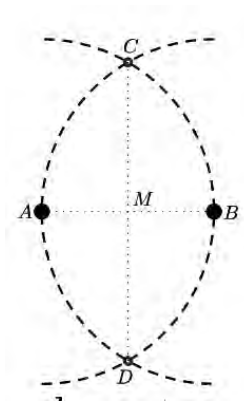
Construcció

Pas 1 i 2. Considerem les circumferències de centres A i B que passen per B i per A .

Es tallen pels punts C i D .

Pas 3 i 4. Tirem els segments AB i CD [R].

Es tallen pel punt M , que és el punt que busquem. ♣



Pas 1. Determinem un punt C que faci que el segment d'extremes A i C sigui el doble del d'extremes A i B . [§1.4.1]

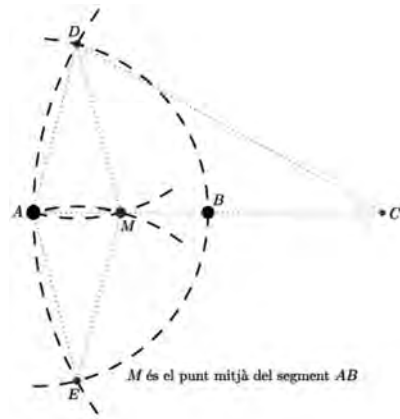
Pas 2 i 3. Amb centres A i C , tirem les circumferències que passen per B i A , respectivament. [C]

Es tallen pels punts D i E .

Pas 4. Amb centres D i E , tirem les circumferències que passen per A . [C]

Es tallen pels punts A i M .

El punt M és el punt buscat. ♣



Exercici 9. Proveu la validesa de les dues construccions. [Indicació. La de l'esquerra és fàcil. Per a la de la dreta, apliqueu la semblança dels triangles isòsceles $\triangle ADC$ i $\triangle AMC$, i obtindreu que $\frac{1}{2} = \frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$ i, de retruc, $AM = \frac{1}{2} AD$.]

1.4.4. El punt mitjà d'un arc de circumferència donat

Problema. Donat un arc de circumferència $\widehat{AB}$ d'extremes A i B i centre O , volem dimidiar-lo, és a dir, volem trobar un punt mitjà M de l'arc $\widehat{AB}$.

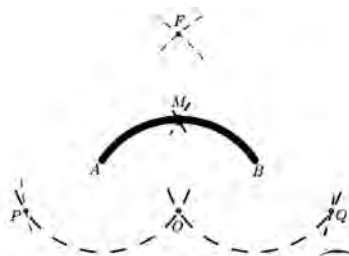


Figura 12. Punt mitjà d'un arc $\widehat{AB}$.

Construcció

Passos 1 i 2. Amb centres A i B , tirem les circumferències que passen per O . [C]

Es tallen en el punt O .

Passos 3 i 4. Tirem les circumferències de centres A i B que passen per B i A . [C]

Es tallen amb les anteriors per P i Q .

Passos 5 i 6. I, amb centres P i Q , les que passen per Q i P . [C]

Es tallen pel punt F , òbviament.

Pas 7. El punt mitjà M del segment FO és el segment buscat. [§1.4.2]

♣³⁶

Exercici 9. Proveu-ho.

1.4.5. La suma i la resta de dos segments amb un vèrtex comú

Problema. Donats els segments AO i OB , volem aconseguir els punts C i D de manera que $AC = AO + OB$ i $AD = AO - OB$ [figura 14a)].³⁷

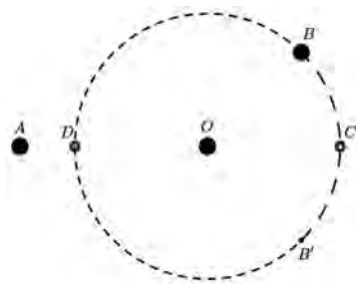


Figura 13. La suma i la resta de dos segments.

Construcció

Pas 1. Amb centre en O , tirem la circumferència de radi OB . [Compàs]

Pas 2. Considerem el simètric B' de B respecte de la recta AO . [§1.4.2, pàgina 80]

Pas 3. Els punts mitjans C i D dels arcs $\widehat{BCB'}$ i $\widehat{BDB'}$ [§1.4.4, pàgina 81] són els punts buscats. ♣

Exercici 10. Proveu que:

- El punt B' es troba damunt la circumferència de centre O i que passa per B .
- Efectivament, $AC = AO + OB$, i $AD = AO - OB$.

36. Aquestes quatre operacions, que poden semblar molt simples, són d'un gran utilitat.

37. És elemental, ja que, amb el regle, podem dibuixar la recta AO . Amb centre en O i radi OA fem la circumferència que talla AO pels punts C i D que estan evidentment alineats.

1.4.6. El trasllat d'un segment a un punt

Un fet molt important és que el compàs sense memòria té memòria perquè podem traslladar un segment donat AB a un punt donat C .

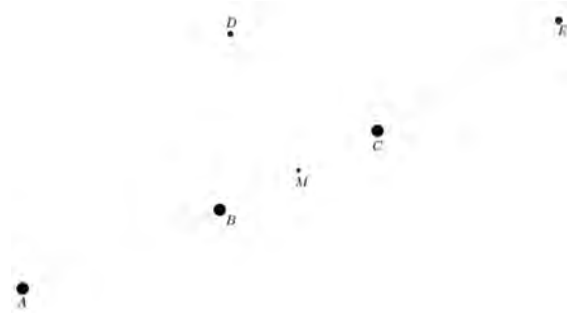


Figura 14. Traslladem AB al punt C .

Construcció

Pas 1. Fem el triangle equilàter de costat AC , és a dir, el punt D . [C sense memòria]

Pas 2. Considerem el punt mitjà M del segment AC . [§1.4.3, pàgina 80]

Pas 3. I el punt simètric E de A respecte de DM [§1.4.2, pàgina 80]

El segment CE té la longitud de AB i un extrem en el punt C , donats. ♣

Veiem ara un resultat que depèn del fet que el compàs té memòria.

1.4.7. La quarta proporcional de tres segments

Problema. Volem determinar la quarta proporcional de AB , CD i EF .

Construcció

Pas 1. Per un punt arbitrari O , tirem les circumferències de radis CD i AB [figura 15]. [C amb memòria]

Pas 2. Per un punt P de la gran [de radi CD], tirem una circumferència de radi EF . [C amb memòria]

Es tallen pel punt Q .

Pas 3. Siguin M i N els punts que determinen les diferències OM i ON dels dos radis. [§1.4.5, pàgina 82]

El segment MN és la quarta proporcional dels segments donats.³⁸

♣³⁹

38. Quina elegància!

39. En aquest cas, $\frac{CD}{AB} = \frac{PQ}{MN}$. Anàlogament, es farien els altres casos possibles.

Pas 2. Per ell, tirem mitja circumferència de radi OE [C].

Passos 3 i 4. Pel punt E , tirem la perpendicular EF a ED de longitud igual al costat del quadrat [§1.3.2a₁, pàgina 75 i C].

Passos 5 i 6. Pel punt F , tirem la perpendicular a EF i considerem el punt H pel qual talla la semicircumferència del pas 2,⁴¹ i, pel punt H , al segment ED , i considerem el punt A pel qual talla ED .

El punt A és el punt buscat.⁴²

♣⁴³

1.4.9. Amb un compàs sol podem fer el mateix que amb el regle i el compàs

Ara podem resoldre la qüestió primordial:

- Com podem determinar els punts pels quals es tallen una recta i una circumferència?
- Com podem determinar el punt pel qual es tallen dues rectes?

1.4.9a. Els punts de tall d'una recta i una circumferència

Problema. Donada una circumferència de centre O i radi r i una recta que passa pels punts A i B , volem trobar els punts de tall P i Q .

Construcció És realment fàcil [figura 17a].

Pas 1. Sigui M el punt simètric de O respecte de AB . [§1.4.2, pàgina 80]⁴⁴

Pas 2. Amb centre en el punt M i radi r , tirem una circumferència. [C amb memòria]

Es tallen pels punts P i Q , que són els punts que buscàvem.

♣

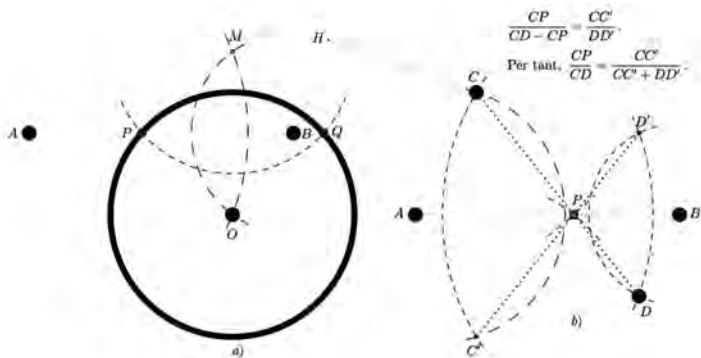


Figura 17. Els punts de tall d'una circumferència de centre donat i una recta, i de dues rectes.

41. Tenim un diorisma. Cal que el costat del quadrat sigui més petit o igual que la meitat del segment ED donat.

42. Quina elegància!

43. De fet, hem determinat la mitjana HA dels segments EA i AD , és a dir, el rectangle de costats EA i ED equival al quadrat donat.

44. Hem refet el dibuix que el determina. Podríem, doncs, haver suprimit l'ítem 1.4.2 (pàgina 80).

Exercici 12. Proveu la validesa de la construcció per obtenir allò que volem.

1.4.9b. El punt de tall de dues rectes

Problema. Donades dues rectes que passen pels punts A i B , i C i D , volem trobar el punt P pel qual es tallen.

Aquest problema, força més delicat, és adequat per aplicar el mètode de l'anàlisi platònica.

Suposem-lo resolt, i sigui P el punt que el resol.

Què se n'extreu d'això [figura 17b]?

Anàlisi

D'entrada, observem que les rectes que passen per C i P , i per D i P , ho fan pels simètrics D' i C' de D i C , respecte de la recta d'extrems A i B .⁴⁵

Ara, tal com hi ha escrit a la part de dalt de la figura [figura 17b], hem de determinar un segment CP que sigui la quarta proporcional dels segments CC' , DD' i $CC' + DD'$.

Per tant,

Construcció

Pas 1. Considerem els punts C' i D' simètrics dels C i D respecte de la recta que passa pels punts A i B . [1.4.2, pàgina 80]

Pas 2. Determinem el segment que equival a la suma dels segments CC' i DD' . [§1.4.5, pàgina 82]

Pas 3. Determinem el segment CH que equival a la quarta proporcional de CC' , DD' i el segment suma obtingut al pas 2. [§1.4.7, pàgina 83]

Pas 4. Fem les circumferències de centres C i C' i radi CH . [C amb memòria]

Es tallen pel punt P que busquem.



Exercici 13. Proveu la validesa de la construcció per obtenir allò que volem.

1.4.10. El centre d'una circumferència donada com a simple figura

En algunes ocasions, hem suposat que utilitzàvem una circumferència de la qual en coneixíem el centre O .⁴⁶

45. Malgrat que no tenim regla, hem dibuixat les rectes per ajudar a la imaginació.

46. Si coneixem el centre, el radi no cal conèixer-lo, si coneixem el centre. Només cal agafar un punt arbitrari P de la circumferència. Aleshores, el segment d'extrems O i P és el radi.

Ara ens preguntem si és possible evitar aquesta limitació.

Problema *Volem determinar el centre de la figura d'una circumferència donada.*

Construcció

És realment fàcil [figura 18].

Considerem dos punts arbitraris A i B de C .

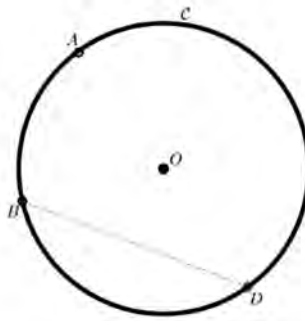


Figura 18. El centre d'una circumferència.

Pas 1. Per B , per exemple, tirem la perpendicular al segment d'extrems A i B . [Nota 1, pàgina 68]

Talla la circumferència C pel punt D . [§1.4.6a, pàgina 83]

Pas 2. Cerquem el punt mitjà O del segment d'extrems A i D . [§1.4.3b, pàgina 80]



Nota 3. En la figura de la dreta i en l'exercici 9 de la pàgina 82, hem vist que la semblança dels triangles $\triangle ADC$ i $\triangle AMC$ permet establir $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$ i, de retop, $AD^2 = AC \times AM$.

Això ens porta a establir un concepte geomètric nou: la *inversió d'un punt respecte d'una circumferència*, que, de retop, permet també determinar el centre d'una circumferència.⁴⁷

1.5. El regle sol

Un cop esbrinada la potència de la circumferència sola, sembla natural que els geòmetres es preguntessin quina és la del regle sol. La resposta és:

*Només amb un regle no podem fer tot allò que es pot fer amb regle i compàs.
De fet, no és possible construir la mitjana proporcional de dos segments.*

Aquesta qüestió se la va plantejar Steiner, motivat pel resultat de Mascheroni. Va ser, precisament, quan intentava resoldre aquesta qüestió que es va adonar que, si disposava d'una

47. Nosaltres ometem aquesta nova aportació. Tanmateix, el lector interessat pot consultar qüestions relacionades amb la inversió a [Courant i Robbins:1941], p. 154-155.

circumferència —de fet, n'hi ha prou amb un arc de circumferència—,⁴⁸ podia fer el mateix que amb el regle i el compàs.⁴⁹ En va proporcionar una solució geomètrica.⁵⁰

Martin, en canvi, proporciona una presentació basada en l'ús dels nombres, un objecte que no havia aparegut fins ara i del qual en parlarem més endavant a §4 (pàgina 92).⁵¹

En tot el que hem fet nosaltres fins aquí, només hem necessitat la geometria, seguint la mentalitat dels *Elements* d'Euclides. No ens han fet falta els nombres per a res.

2. Els tres problemes clàssics

Ara bé, els grecs es van plantejar, *per generalització*, tres problemes geomètrics que es coneixen com els *tres problemes clàssics*.

2.1. Preàmbul. La duplicació del quadrat i la dimidiació de l'angle

2.1a. Problema. Amb regle i compàs, podem doblar un quadrat.

És a dir, donat un segment AB , amb regle i compàs en podem fer un altre AC el quadrat del qual equival al doble del de costat AB (figura 18a).

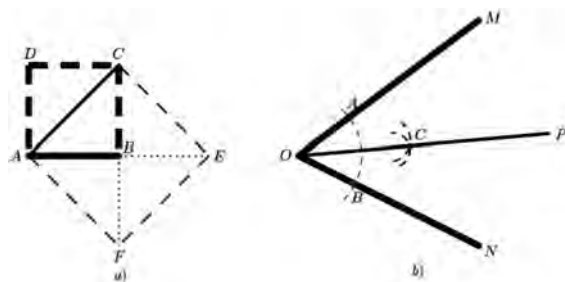


Figura 19. Duplicar el quadrat i dimidir l'angle.

Construcció

Pas 1. Fem el quadrat de costat AB , $\square ABCD$ [R i C, §1.3.2a₁, pàgina 75]

Pas 2. Unim els vèrtexs A i C .

[R]



Exercici 18. El quadrat $\square ACEF$, de costat AC , és el doble del $\square ABCD$ de costat CD . [Indicació. Per descomposició tangram.]

48. Nota, pàgina 79.

49. Podem veure una síntesi del treball de Steiner en la secció VIII del capítol 4 de [Courant i Robbins:1941], p. 209-210.

50. [Courant i Robbins:1941], p. 209-210, recorre a la *geometria projectiva*.

51. [Martin:1998], capítol IV, p. 69-82.

2.1b Problema *Amb regla i compàs, podem dimidiar un angle.*

És a dir, donat l'angle $\widehat{MON}$, podem determinar el punt C que fa que la recta que l'uneix amb O determini dos angles iguals $\widehat{MOC}$ i $\widehat{CON}$ (figura 18b).

Construcció

Pas 1. Amb centre en el vèrtex O de l'angle i radi arbitrari, tirem un arc de circumferència. [C]

Talla els costats de l'angle pels punts A i B .

Pas 2 i 3. Amb centre en els punts de tall A i B , tirem els arcs de circumferència que passen per l'altre punt. [C]

Es tallen pel punt C .

Pas 4. Tirem la recta que uneix els punts O i C . [R]

Aquesta recta *bisectriu* dimidia l'angle $\widehat{MON}$; és a dir, $\widehat{MOC} = \widehat{CON}$.



2.2. Els polígons regulars construïbles amb regla i compàs

No és un problema clàssic grec i ja n'hem parlat a §1.2.2a i 1.2.2b (pàgina 70).

2.3. La quadratura del cercle

En els *Elements* d'Euclides s'estableix que tota figura poligonal és *quadrable*. És a dir, es pot fer un quadrat de la mateixa superfície que la figura poligonal.

Tot es basa en tres fets:

- Dos triangles que tenen les bases i les altures iguals, encara que tinguin una forma diferent, tenen la mateixa superfície.
- Tot triangle equival en superfície a un rectangle construïble a partir d'ell amb R i C .
- Tot rectangle és quadrable, i el quadrat es pot construir amb R i C .



És natural, doncs, que els geòmetres grecs es preguntessin: *Hi ha figures limitades per arcs de circumferència, construïbles amb regla i compàs i quadrables? I el cercle, ho és?* Hipòcrates de Quios (470 aC-410 aC) va proporcionar tres *lúnules* que complien les dues condicions.⁵²

Aquest problema que, *geomètricament*, sembla **anàleg** als altres és de naturalesa *algebraica absolutament diferent* i, per tant, no l'analtizarem.⁵³

52. [Pla:2010], capítol 3, §2, p. 93-105. [Pla:2016], §3.4.5 i §3.4.7, p. 234-236, i 238-248.

53. Si ho voleu fer, vegeu [Pla:2016], §3.4.5 i §3.4.7 ítem 4, p. 234-236 i 244-249. És d'un interès notable el text d'Aristòtil, §A.6.13.2c₁, [Pla:2016], p. 434-435.

2.4. Generalitzem

És natural —i propi de la matemàtica— plantejar-se els problemes que sorgeixen per *generalització*.

En concret,

Problema. Amb regla i compàs, és possible:

- a) duplicar el cub?
- b) trisecar l'angle?

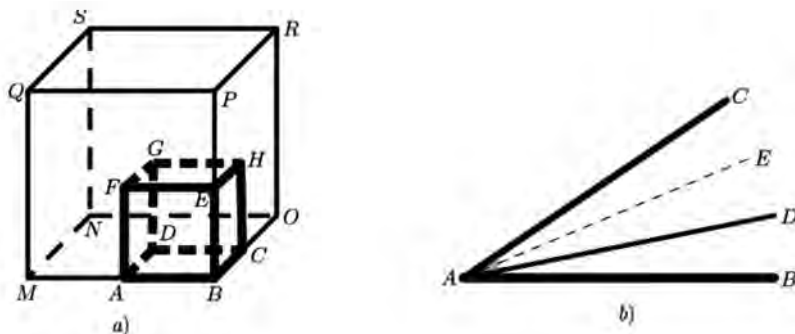


Figura 20. Duplicar el cub i trisecar l'angle.

És a dir,

- a) Donat un cub de vèrtexs diametralment oposats A i H (figura 20a), volem determinar el de vèrtexs diametralment oposats B i S de volum doble al del donat.
- b) Donat un angle $\widehat{BAC}$ (figura 20b), volem determinar els punts D o E de manera que la recta que passa pels punts A , i D o E determini els angles $\widehat{BAD}$ o $\widehat{BAE}$ iguals a una tercera part o a dues terceres part del donat.⁵⁴

Els geòmetres grecs van trobar moltes maneres de resoldre aquest problema —o bé inventant corbes que en ser tallades entre si, o amb un cercle, aconseguien el punt desitjat, o bé creant ginys geomètrics que ho fessin—, però no van trobar la manera de fer-ho amb regla i compàs.⁵⁵

La pregunta natural és:

- a) No eren prou hàbils?
- b) No es pot fer?

Estaven convençuts que **no** era possible fer-ho.⁵⁶

Però la demostració matemàtica precisa trigaria molts segles. Calia que s'hagués canviat de paradigma i que la geometria s'hagués algebratitzat gràcies a les aportacions dels matemàtics àrabs i dels del Renaixement italià.

54. Si podem trobar un *trisector* també podem trobar l'altre, ja que sabem dimidiar angles.

55. [Pla:2026] com a síntesi de la qüestió.

56. [Pla:2026], §4.1.2f, p. 89.

En síntesi, es necessitava l'aportació que l'insigne filòsof René Descartes (1596-1650) va fer en la *Geométrie*,⁵⁷ un dels tres apèndixs de *Le discours de la méthode* (1637).

Dos-cents anys més tard (1837), amb 23 anys, Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) responia la pregunta en un article de set pàgines en què establia:

*Els nombres reals construïbles amb regla i compàs són solucions d'un polinomi irreductible en una variable x i amb els coeficients racionals de grau amb una potència de 2.*⁵⁸

3. I apareixen Descartes i la seva *Geometria*

Una síntesi breu de l'epistemologia algebraica de la *geometria cartesiana*,⁵⁹ basada en l'àlgebra heretada dels àrabs i desenvolupada pels matemàtics italians del Renaixement i, en l'àlgebra sincopada i literal, és la següent:

3.1. Les operacions numèriques que provenen de l'ús del regla i el compàs de segments amb nom

La idea de Descartes és molt simple.

3.1.1. Els segments tenen nom

Consisteix a **donar nom** als segments rectilinis, és a dir, a atribuir-los el valor de la seva longitud, un cop fixat un *segment unitat*, tant si aquesta longitud és *racional* o *irracional*, *coneguda* o *desconeguda*.⁶⁰

Així, doncs, tenim un segment de «nom» 1 i aleshores assignem a cada segment un nombre $a, b, c, \dots, x, y, z$.⁶¹

3.1.2. Les operacions algebraiques de les construccions amb regla i compàs

La qüestió és: com podem traduir a l'àlgebra dels «noms» —dels nombres— allò que obtenim quan, en geometria, fem construccions amb regla i compàs?

57. El capítol primer de *La géométrie* de René Descartes és un text excel·lent i molt entenedor, i constitueix un bon text per començar a llegir originals matemàtics. En síntesi, conté el que es diu a §3.1.2 i, atès que diposem de $+$, $-$, $\cdot$, $\div$ i $\sqrt{\quad}$, es poden resoldre les equacions de primer grau i segon grau $X + a = 0$ i $Y^2 + bY + c = 0$, amb regla i compàs, ja que $X = -a$ i $Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2}$. A més, el text proporciona com cal fer-ho geomètricament [Pla i Viader:1999], capítol 1, p. •. Per a una descripció dels trencaments epistemològics de les aportacions geomètriques del filòsof francès en relació amb el pensament grec, [Pla:1987].

58. [Wantzel:1837], §III, p. 368.

59. Recordem que, de vegades, Descartes signava amb el nom llatinitzat *Cartesius*.

60. Els nombres racionals eren els únics que acceptaven els matemàtics grecs i constituïen la base de la seva aritmètica. Els irracionals, en no ser expressables com a parts al·lotes de 1, no eren acceptats. Per a un geòmetra grec, la diagonal d'un quadrat de costat 1, si bé és construïble amb regla i compàs, té una longitud que **no** és *commensurable*. Per tant, no li podem assignar cap nombre. Podem veure les definicions 1, 2 i 3 del llibre VII, dels *Elements* d'Euclides. [Pla:2020], p. 87-88.

61. Descartes proposa les primeres lletres $-a, b, c, \dots$ —per als valors que suposem donats i les darreres $-x, y, z$ — per als valors desconeguts que busquem.

3.1.2a. La suma i la resta. És clar que donats dos segments a i b , podem construir un segment de nom $a + b$ i un altre de nom $a - b$ (§1.4.5a, pàgina 82).

3.1.2b. La multiplicació i la divisió. Donats els noms $1, a$ i b , podem determinar el nom dels segments quarta proporcional d'ells. Si busquem x i y de manera que $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$ i $\frac{y}{a} = \frac{b}{1}$, tenim que $x = \frac{a}{b}$ i que $y = a \cdot b$.

3.1.2c. L'arrel quadrada. Donats 1 i a , s'obté geomètricament buscant la mitjana proporcional dels segments de longitud 1 i a . En efecte, si z designa aquesta mitjana, $z^2 = a$ i, de retop, $z = \sqrt{a}$.

4. Cloenda

Si bé, com dèiem, l'eina algebraica ens permet demostrar rigorosament la impossibilitat de resoldre els dos problemes clàssics amb R i C , hi ha un mètode geomètric, la *papiroflèxia* o *origami*, que permet resoldre'ls. Com hem indicat en la introducció, dedicarem un segon article a veure, a poc a poc com hem fet en aquestes pàgines, els passos que porten a aquestes solucions.⁶²

Bibliografia

- [1] **[Berggren:1986]** John Lennart Berggren (1986). *Episodes in the mathematics of Medieval Islam*. Nova York: Springer-Verlag.
- [2] **[Boyer:1949]** Carl B. (1949). *The concepts of the calculus, a critical and historical discussion of the derivative and the integral*. Hafner. [Reeditat l'any 1959 amb el títol *The history of the calculus and its conceptual development*. Nova York: Dover. En línia a https://download.tuxfamily.org/openmathdep/history/History_of_the_Calculus-Boyer.pdf].
- [3] **[Courant i Robbins:1941]** Richard Courant i Herbert Robbins (1941). *What is mathematics?*. Nova York: Oxford University Press. [Traducció castellana de L. Bravo, *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar (1955). En línia a [https://www.cimat.mx/gil/docencia/2017/mate_elem/\[Courant,Robbins\]What_Is_Mathematics\(2nd_edition_1996\)v2.pdf](https://www.cimat.mx/gil/docencia/2017/mate_elem/[Courant,Robbins]What_Is_Mathematics(2nd_edition_1996)v2.pdf)].
- [4] **[Dörrie:1932]** Heinrich Dörrie (1933). *Triumph der Mathematik*. Breslau: Ferdinand Hirt. [Traducció anglesa de D. Antin, *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their history and solution*. Nova York: Dover, 1958].
- [5] **[Gauss:1801]** Carl Friedrich Gauss (1801). *Disquisitiones arithmeticae*. Leipzig: Gerh. Fliescher. [Traducció i pròleg de G. Pascual i Xufré, *Disquisicions aritmètiques* Barcelona, Societat Catalana de Matemàtiques (1996)].
- [6] **[Martin:1998]** George E. Martin *Geometric constructions*. Nova York: Springer-Verlag.
- [7] **[M7 MacTutor:1994-2023]** Al'adreça <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/> s'indexen alfabèticament les biografies dels matemàtics aplegades a «MacTutor History of Mathematics», un índex creat l'any 1994 i mantingut al dia per Edmund Robertson i John O'Connor de la *School of Mathematics and Statistics*, i gestionat per la Universitat. Normalment, el primer ítem de les *References* de cada personatge enllaça amb la biogra-

62. Acabat a Tamariu, el 21 de juliol de 2024.

fia corresponent del *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990), editat per Charles C. Gillispie. En aquest cas, les biografies són obra d'especialistes diversos.

- [8] **[Pla:2016]** Josep Pla Carrera (2016). *Història de la matemàtica grega: Grècia I (de Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil)*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [9] **[Pla:2018]** — (2018). *Història de la matemàtica grega: Grècia IIa els Elements d'Euclides: Llibres I, II, III, IV, V i VI*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [10] **[Pla:2020]** — (2020) *Història de la matemàtica grega: Grècia IIa els Elements d'Euclides: Llibres VII, VIII, IX, X, XI i XII*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [11] **[Pla:2026]** — (2026) *Història de la matemàtica grega: Grècia IIIb. Altres obres d'Apol·loni, Conó i Dositeu, Nicomedes i Eratòstenes, Dionísodor, Diocles i Els miralls ustoris*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans (pendent de publicació).
- [12] **[Pla i Viader:1999]** Josep Pla Carrera i Pelegrí Viader Canals (1999). *René Descartes. La geometria*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.
- [13] **[Wantzel:1837]** Pierre-Laurent Wantzel «Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas». *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1 (2), 1837, p. 366–372. [En línia a <http://visualiseur.bnf.fr/ConsulterElementNum?O=NUMM-16381&Deb=374&Fin=380&E=PDF>].

.....

Normes per a la presentació de contribucions

1. La revista *Nou Bixa* accepta per a la seva publicació contribucions originals relacionades amb experiències didàctiques, activitats d'ensenyament i aprenentatge, escrits d'opinió, de divulgació i d'investigació en el camp de la matemàtica i el seu ensenyament en qualsevol nivell educatiu.
2. Les contribucions rebudes seran avaluades prèviament per dos especialistes reconeguts. La decisió presa pel Consell de redacció sobre l'acceptació de la publicació serà notificada directament als autors amb una indicació de la data aproximada de publicació i el possible requeriment d'introduir modificacions en el text.
3. Per a la presentació de treballs originals, els autors trametan a l'adreça noubixa@gmail.com un arxiu, en Word o en LaTeX. Els gràfics, els diagrames i les figures hauran de ser originals (no fotocopiats). Els arxius gràfics es presentaran en format eps o tif.
4. La contribució haurà d'incorporar el títol, el nom de l'autor o autors, la seva adreça postal professional completa i la seva adreça electrònica. S'adjuntarà un resum no més llarg de 300 paraules en català i anglès. Al final del document s'inclourà obligatòriament la bibliografia per ordre alfabètic de cognoms, d'acord amb la normativa APA, com en els exemples següents:

Articles

Albertí, M. (2002). Les matemàtiques des d'una perspectiva cultural: Etnomatemàtiques. *Bixa*, 20, 6-25.

Llibres

Godino, J., Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Capítols de llibres

Edo, M., Revelles, S. (2004). Situaciones matemáticas potencialmente significativas. Dins M. Antón i B. Moll (ed.), *Educación Infantil. Orientaciones y Recursos (0-6 años)* (p. 410/103-410/179). Barcelona: Praxis.

Actes de congressos

Morales, M., Font, V., Planas, N. (2004). Estudio microetnográfico en torno a un conocimiento matemático situado. Dins A. Franzé i altres (ed.), *Actas de la I Reunión Científica Internacional sobre Etnografía y Educación* (CD-ROM). València: Germania, Polis Paideia.

Pàgines web

Geogebra per a Infantil i Primària.

<https://www.geogebra.org/m/tkdC27mf>

5. Els continguts de *Nou Bixa* estan subjectes —llevat que s'indiqui el contrari en el text, en les fotografies o en altres il·lustracions— a una llicència de Reconeixement-No comercial-Sense obra derivada 3.0 de Creative Commons, el text complet de la qual es pot consultar a <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/es/deed.ca>. Així, doncs, s'autoritza el públic en general a reproduir, distribuir i comunicar l'obra, sempre que es reconegui l'autoria i l'entitat que la publica, i no se'n faci un ús comercial ni se'n difongui cap obra derivada.
6. Els articles es publicaran en llengua catalana. Només es traduiran al català les contribucions acceptades d'autors no residents als Països Catalans.
7. Els autors es responsabilitzaran del compliment de les normes establertes per a l'autorització de la reproducció de material procedent d'altres fonts bibliogràfiques.
8. Els articles tindran una extensió màxima de 8000 paraules, incloses les notes a peu de pàgina, però s'accepten articles més curts, d'entre 2000 i 4000 paraules.
9. Fem notar que en aquesta publicació s'utilitza preferentment el punt per separar decimals, en lloc de la coma recomanada per l'IEC, per tal de facilitar la comprensió de les expressions matemàtiques.



feemcat

Federació d'Entitats per a l'Ensenyament
de les Matemàtiques a Catalunya



Societat
Catalana de
Matemàtiques

